Mines-Pont MP 2016
Première épreuve de Mathématiques

Correction de la partie A

La première partie de ce magnifique sujet de concours étudie le comportement asymptotique d'une chaîne de Markov (sans utiliser le terme d'ailleurs) et fait la part belle à la réduction des matrices, les probabilités et la géométrie. Elle demande de connaître de nombreux résultats classiques du programme de Sup portant notamment sur les racines $n-$ième de l'unité et les calculs de déterminants. Les meilleurs candidats ont sans doute traité dans sa totalité et sans aucune erreur la première partie de ce sujet en reconnaissant une compilation de Classiques qu'ils ont travaillés maintes fois pendant leurs deux années de préparation.

Autour de l'inégalité de Hoffman-Wilandt

A - Un exemple

1.

Rappel de cours 1 (Permutation d'un ensemble fini)**.**

Une permutation de $[\![1,n]\!]$ $(n \geq 1)$ est une application bijective de $[\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$. Si on note Σ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ nous avons le résultat classique : $\mathrm{Card}(\Sigma) = n!$.

La matrice J est la matrice $M_{\hat{\sigma}}$ où $\hat{\sigma}$ est le $n-$cycle suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \hat{\sigma}(1) & = & n \\ \hat{\sigma}(2) & = & 1 \\ \vdots & = & \vdots \\ \hat{\sigma}(n) & = & n-1 \end{array}\right.$$

En effet,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ \underbrace{1}_{\hat{\sigma}(1) = n \text{ car } i = n \text{ et } j = 1} & 0 & \dots & 0 & \underbrace{0}_{\hat{\sigma}(n) = n-1 \text{ car } i = n-1 \text{ et } j = n.} \end{pmatrix}$$

■ **Remarque** On en déduit $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_n) = \mathrm{Card}(\Sigma) = n!$ via la bijection $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & \mathcal{P}_n \\ \sigma & \longmapsto & M_\sigma \end{array}\right.$ ■

Déterminons le polynôme caractéristique χ_J de J :

Point méthodologique 1 (Calcul rapide d'un déterminant).

Pour calculer un déterminant, vous devez toujours garder à l'esprit que :

1. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des coefficients diagonaux. De même, le déterminant d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) est encore le produit des coefficients diagonaux.
2. Privilégier un développement par ligne ou par colonne en n'oubliant pas le $(-1)^{i+j}$ devant le coefficient de la $i-$ème ligne et $j-$ème colonne. Dans la très grande majorité des exercices, il faut effectuer un développement par rapport à la première ligne ou la première colonne.
3. Toujours rappeler la taille du déterminant en jeu. *La correction précise à chaque étape du calcul la taille du déterminant.*

$$\begin{aligned}
\chi_J &= \det(XI_n - J) \\
&= \underbrace{\begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix}}_{\text{De taille } n} \\
\text{Développement par rapport à la 1ère colonne} \quad &= (-1)^{1+1} X \underbrace{\begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix}}_{\text{De taille } n-1} + (-1)^{n+1}(-1) \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ X & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & X & -1 \end{vmatrix}}_{\text{De taille } n-1} \\
&= XX^{n-1} + (-1)^{n+2}(-1)^{n-1} \\
&= X^n - 1 \\
\chi_J &= \prod_{k=0}^{n-1} X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Les valeurs propres réelles de J sont par conséquent :

$$\begin{cases} 1 & : \text{ Si } n \text{ est impair.} \\ -1 \text{ et } 1 & : \text{ Si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Les valeurs propres complexes de J sont $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. J possède n valeurs propres distinctes donc J est diagonalisable.

Rappel de cours 2 (Condition suffisante de diagonalisibilité).

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ alors M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$. *Cette propriété est bien sûr qu'une condition suffisante et n'est en aucun cas nécessaire. En effet, il suffit de considérer la matrice identité en dimension supérieure à 2 qui ne possède qu'une valeur propre (1) et qui est pourtant diagonalisable car diagonale.*

Point méthodologique 2 (Calculer les valeurs propres d'une matrice).

Pour calculer les valeurs propres, on pourra choisir entre les deux méthodes suivantes :

1. Appliquer la méthode du pivot de Gauss au système équivalent à l'équation vectorielle $MX = \lambda X$. Conclure sur l'inversibilité ou non du système en discutant sur les valeurs de λ qui annulent au moins un coefficient diagonal. Le principal intérêt de cette méthode est qu'elle fournit presque immédiatement la dimension des sous-espaces propres de M.
2. Calculer $\det(\lambda I_n - M)$. Méthode à privilégier lorsque l'on est face à un discriminant de taille n quelconque.

■ **Remarque** Ce premier calcul demandait d'être rigoureux et permettait, déjà, aux candidats sérieux de creuser l'écart. Le calcul d'un déterminant $n \times n$ est une question inévitable des sujets s'intéressant à la réduction des matrices. Il existe des techniques très classiques à connaître qui vous feront gagner un temps considérable ! Notamment celle qui consiste à exprimer un déterminant Δ_n en fonction des $(\Delta_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ par une relation de récurrence linéaire. Nous vous invitons à pratiquer cet exercice sur le grand classique Centrale MP 2013 - Maths II - Partie III. ■

2. J étant diagonalisable, il existe une famille de vecteurs propres de J formant une base de $\mathbb{C}^n$. Déterminons alors une famille de vecteurs propres de J. $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, posons

$$X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

Nous avons $JX_k = \omega_k X_k$. Ainsi, $(X_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est une famille de vecteur propre associée à des valeurs propres distinctes deux à deux de J, c'est une base de $\mathbb{C}^n$.

Astuce Il fallait avoir une bonne idée des vecteurs propres pour rédiger une solution concise et percutante pour cette question. Néanmoins, nous vous présentons le travail au brouillon qui permettait de deviner le résultat !

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, notons $X_k = {}^t(x_{1,k}, \cdots, x_{n,k})$ un vecteur propre associé à la valeur propre ω_k : $JX_k = \omega_k X_k$. L'équation $JX_k = \omega_k X_k$ est équivalente au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{2,k} & = & \omega_k x_{1,k} \\ x_{3,k} & = & \omega_k x_{2,k} \\ \ddots & = & \vdots \\ x_{n,k} & = & \omega_k x_{n-1,k} \\ x_{1,k} & = & \omega_k x_{n,k} \end{array}\right. \underbrace{\Longleftrightarrow}_{\substack{\text{Par substitution des } x_{1,k} \\ \text{de la 1ère à la dernière ligne} \\ \text{qui nous donne } x_{1,k} = \omega_k^n x_{1,k}}} \left\{\begin{array}{lcl} x_{2,k} & = & \omega_k x_{1,k} \\ x_{3,k} & = & \omega_k^2 x_{1,k} \\ \vdots & = & \vdots \\ x_{n,k} & = & \omega_k^{n-1} x_{1,k} \\ x_{1,k} & \in & \mathbb{C} \end{array}\right.$$

$$\underbrace{\Longleftarrow}_{\text{En prenant } x_{1,k} = 1} X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

Nous avons donc exhibé un bon candidat pour être un vecteur propre associé à la valeur propre ω_k ! ■

3. Nous avons donc

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ **Remarque** Cette question portant sur U_0 n'avait que pour but de familiariser le candidat à la notation et n'a (sans doute) rapporté aucun point...

$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall m \in \mathbb{N}$, nous avons $\mathbf{P}_{(X_m = k \mod n)}(X_m = k-1 \mod n) = \mathbf{P}_{(X_m = k \mod n)}(X_m = k+1 \mod n)$ et $\mathbf{P}_{(X_m = k \mod n)}(X_m = j \mod n) = 0$ pour $j \neq k-1$ et $k+1$, ce qui impose $\mathbf{P}_{(X_m = k \mod n)}(X_m = k-1 \mod n) = \mathbf{P}_{(X_m = k \mod n)}(X_m = k+1 \mod n) = \frac{1}{2}$. Ce qui se traduit matriciellement :

$$A \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k-1 \\ \\ \leftarrow k+1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Remarquons bien que :

$$\mathbf{P}_{(X_m = n-1 \mod n)}(X_m = n \mod n) = \mathbf{P}_{(X_m = n-1 \mod n)}(X_m = 0 \mod n)$$
$$\mathbf{P}_{(X_m = 0 \mod n)}(X_m = -1 \mod n) = \mathbf{P}_{(X_m = 0 \mod n)}(X_m = n-1 \mod n)$$

nous obtenons donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \dots & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{J + {}^tJ}{2}$$

■ **Remarque** La traduction du problème par le conditionnement par rapport aux événements $(X_m = k)$ n'était pas attendue de la part des candidats et la traduction matricielle suffisait. Néanmoins, elle était la bienvenue pour montrer le lien du problème avec les chaînes de Markov ! Ceci pouvait se retrouver par une bonification des copies l'ayant introduite.

4. Nous pouvons remarquer que

$$AX_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \dots & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-2} \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_k + \omega_k^{n-1} \\ 1 + \omega_k^2 \\ \omega_k + \omega_k^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 + \omega_k^{n-2} \end{pmatrix} = \frac{\omega_k + \overline{\omega_k}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-2} \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

Finalement, $AX_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X_k$. Ayant supposé n impair, la valeur propre de module maximal est unique et vaut 1. Elle est associée au vecteur propre X_0.

■ **Remarque** Encore une fois cette question demandait du métier pour s'en sortir ! D'aucuns auraient pu tenter leur chance en calculant le polynôme caractéristique de A qui semble à première vue bien compliqué... Il suffisait ici de remarquer que les vecteurs propres de A sont ceux de J. Attention à la confusion classique :

— M et ${}^tM$ ont les mêmes valeurs propres grâce à la relation $\det(XI_n - M) = \det\left({}^t(XI_n - M)\right) = \det\left(XI_n - {}^tM\right)$.
— M et ${}^tM$ n'ont pas nécessairement les mêmes vecteurs propres.

5. Une récurrence immédiate nous donne, $\forall m \in \mathbb{N}, U_m = A^m U_0$. A étant diagonalisable, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$A = P^{-1}DP = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \end{pmatrix} P$$

Remarquons que A est symétrique réelle, nous pouvons donc choisir P dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ grâce au théorème spectral.

Rappel de cours 3 (Théorème spectral)**.**

Soit M une matrice symétrique réelle. M est diagonalisable dans une base orthonormale. Autrement dit, il existe une famille de vecteurs propres de M qui forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique. Ce qui est équivalent à :

$$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), M = {}^tPDP$$

avec D diagonale.

On en déduit que :

$$A^m = P^{-1}D^mP = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^m & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \left(\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right)^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \left(\cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)^m \end{pmatrix} P$$

Or $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \left|\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right| < 1$ donc :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \lim_{m\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^m = 0$$

et finalement :

$$\lim_{m\to+\infty} A^m = P^{-1}\left(\lim_{m\to+\infty} D^m\right) P = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} P = \Pi$$

Nous pouvons interpréter Π comme la matrice de projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(X_0)$. On en déduit ainsi que $\lim_{m\to+\infty} U_m = \Pi X_0$ ce qui s'interprète géométriquement comme la projection orthogonale de U_m sur $\mathrm{Vect}(X_0)$.

Remarque

1. L'égalité $\lim_{m\to+\infty} A^m = \lim_{m\to+\infty} P^{-1}D^mP = P^{-1}\left(\lim_{m\to+\infty} D^m\right)P$ n'est pas aussi triviale que la correction le laisse penser. Elle résulte du fait que le produit matriciel est continu en tant qu'application bilinéaire d'espaces vectoriels de dimensions finies. La correction ici ne s'est pas étendue sur ce point mais il aurait été judicieux de le rappeler car nous sommes face à la première question traitant de la continuité des applications d'espaces vectoriels de dimensions finies.
2. Il n'était pas clairement attendu des candidats de fournir une interprétation géométrique de la limite de (U_m). En revanche, les candidats l'ayant précisée ont impressionné leur correcteur !