ESSEC 1996 - Une autre somme trigonométrique

Soit $p \in [\![1, n]\!]$, Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin^2(\frac{kp\pi}{n+1}), n \in \mathbb{N}^*$$

Rappel de cours 1.

$$\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin^2(\frac{kp\pi}{n+1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 1 - \cos(\frac{2kp\pi}{n+1}) = \frac{n+1}{2} - \sum_{k=0}^{n} \cos(\frac{2kp\pi}{n+1})$$
$$= \frac{n+1}{2} - \text{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} (e^{\frac{2ip\pi}{n+1}})^k\right]$$

Or $p \in [\![1, n]\!]$ donc $\frac{2p\pi}{n+1} \in [\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2n\pi}{n+1}]$ et par conséquent $\frac{2p\pi}{n+1} \in]0, 2\pi[$
Ainsi $e^{\frac{2ip\pi}{n+1}} \neq 1$, on reconnaît alors la somme des termes d'une suite géométrique et il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin^2(\frac{kp\pi}{n+1}) = \frac{n+1}{2} - \text{Re}[\frac{1-e^{2ip\pi}}{1-e^{\frac{2ip\pi}{n+1}}}] \quad \text{or} \quad e^{2ip\pi} = 1$$

D'où finalement :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \sin^2(\frac{kp\pi}{n+1}) = \frac{n+1}{2}}$$

■ **Remarque :** Il était inutile ici de mettre en facteur les "angles moitiés" comme on est habitué à le faire !