L'irrationalité de $\sqrt{2}$

Exercice Nous allons montrer dans ce court exercice que le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel en procédant par l'absurde à plusieurs reprises.
Supposons donc que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Rappel de cours 1.

L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des réels que l'on peut écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs p et q avec $q \neq 0$. Il sera parfois judicieux de choisir p et q tels que le quotient $\frac{p}{q}$ soit irréductible.

Comme $\sqrt{2}$ est strictement positif, il vient : $\exists (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* / \quad \sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $\dfrac{p}{q}$ fraction irréductible.

1. Montrer que p^2 est nécessairement un nombre entier pair.

2. Montrer, en procédant par l'absurde, que p est nécessairement un nombre entier pair.

3. En déduire que q est un nombre entier pair.

4. Aboutir à une contradiction puis conclure. ■

1.

Point méthodologique 1.

Pour montrer qu'un réel x est un entier pair (resp. impair), il suffit de montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$ (resp. $x = 2k+1$).
Se souvenir ainsi qu'on pourra toujours écrire un entier pair (resp. impair) sous la forme $2k$ (resp. $2k+1$) avec $k \in \mathbb{Z}$.

Par hypothèse, on a : $\exists (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* / \quad \sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $\dfrac{p}{q}$ fraction irréductible. En élevant cette égalité au carré, on obtient $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, soit encore : $2q^2 = p^2$. Ainsi, comme q^2 est un entier, on en déduit que $2q^2$ est un entier pair et on peut conclure :

$$\boxed{p^2 \textbf{est nécessairement un entier pair.}}$$

2.

Point méthodologique 2.

Le principe de la démonstration par l'absurde est très simple. Il consiste à démontrer qu'une proposition logique est vraie en suivant les étapes suivantes :
- on suppose que la proposition est fausse ;
- on analyse ce que cela implique en ayant en tête qu'il faut arriver à une implication illogique donc absurde ;
- après l'analyse précédente, on finit par trouver une contradiction, une absurdité ;
- on conclut alors que la proposition qu'on a supposée fausse était donc vraie.

On procédera souvent par l'absurde dans les cas suivants :
- lorsqu'on demande de vérifier qu'une affirmation est vraie ou fausse ;
- lorsqu'on a un libellé de la forme : "montrer qu'il existe au moins un... tel que...". On supposera alors qu'il n'en existe pas, et on aboutira à une contradiction ;
- lorsqu'au contraire, on a un libellé de la forme : "montrer qu'il n'existe aucun... tel que...". On supposera alors qu'il en existe un et on aboutira à une contradiction.

Ce principe semble théorique à première vue mais les exercices, dont le présent exercice, donnent une tournure concrète à ce procédé très classique en prépa HEC.

Supposons que p n'est pas un entier pair. Alors nécessairement, p est un entier naturel impair et donc :

$$\exists k \in \mathbb{N} / \;\; p = 2k+1$$

En élevant cette égalité au carré, il vient :

$$p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Or, on sait que la somme de deux entiers pairs est un entier pair et la somme d'un entier pair et d'une entier impair est un entier impair. Ici, $4k^2$ et $4k$ sont pairs donc $4k^2+4k$ est un entier pair et donc, $4k^2+4k+1$ est un entier impair.

Ainsi, p^2 est un entier impair. On aboutit à une contradiction car, d'après 1., on sait que p^2 est pair.
On conclut :

$$\boxed{p \textbf{ est nécessairement un nombre entier pair.}}$$

3. On a vu en question 1. que : $2q^2 = p^2$. Or, d'après la question précédente, p est pair donc :

$$\exists k \in \mathbb{N} / \;\; p = 2k$$

Et donc, en élevant au carré cette dernière égalité :

$$\exists k \in \mathbb{N} / \;\; p^2 = 4k^2$$

En reprenant l'expression liant p et q, il vient alors :

$$2q^2 = p^2 = 4k^2$$

Ce qui donne en divisant par $2 \neq 0$:

$$q^2 = 2k^2$$

Ainsi, q^2 est un entier pair. Or, d'après la question 2., on sait que : p^2 pair $\Rightarrow p$ pair. Ce résultat est encore valable pour l'entier q. On conclut donc :

$$\boxed{q \textbf{ est un entier pair.}}$$

■ **Remarque** Ce type de raisonnement par analogie déroute souvent les candidats débutants. Il est pourtant très fréquent en prépa HEC. Retenez donc bien ce procédé qui consiste à reprendre un résultat précédent en remplaçant une lettre (p ici) par une autre (q ici). Ce procédé est possible si l'on a bien vérifié que le résultat impliquant la première lettre est encore valable avec une autre lettre. ■

4. D'après 2. et 3., p et q sont des entiers pairs donc on a :

$$\exists(k,k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*/ \quad \frac{p}{q} = \frac{2k}{2k'}$$

On obtient une fraction qui n'est pas irréductible puisqu'on peut la simplifier par 2 qui est facteur commun au numérateur et au dénominateur. On aboutit à une contradiction puisque, par construction, $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible. La supposition initiale selon laquelle $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel est donc fausse. On conclut magnifiquement :

$$\boxed{\sqrt{2} \textbf{ est un nombre irrationnel.}}$$