Calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1)^3$

Exercice Soit n un entier naturel fixé. Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Ecrire S_n sans utiliser le symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.
3. On pose $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(2k)^3$ et $U_n = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$.
4. Calculer T_n et U_n.
5. Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

1. On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 ... + (2n+1)^3$$

La somme est composée de $n-0+1$ termes, i.e de $n+1$ termes.
2. On peut développer lourdement ce calcul mais il est préférable ici de connaître la formule du binôme de Newton à l'ordre 3...

Rappel de cours 1.

Formule du binôme de Newton

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a,b) \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k a^{n-k}$$

Cas particulier à connaître

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

En appliquant la formule précédente, on a en développant puis en distribuant et en scindant la somme en plusieurs sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(8k^3 + 3\times 4k^2 \times 1 + 3\times 2k \times 1^2 + 1^3) = 8\sum_{k=0}^{n}k^3 + 12\sum_{k=0}^{n}k^2 + 6\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1$$

On reconnaît des sommes usuelles et il vient :

$$\begin{aligned} S_n &= 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + (n+1) \\ &= (n+1)[2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n + 1] \\ &= (n+1)[2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 2n + 3n + 1] \\ &= (n+1)(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1) \end{aligned}$$

On peut conclure :

$$\boxed{S_n = (n+1)(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1)}$$

Point méthodologique 1.

Lorsqu'on a une question calculatoire dont l'énoncé ne donne pas le résultat, il est important de se rassurer en vérifiant la justesse de notre résultat. On avait, ici, deux façons de vérifier l'expression obtenue :

- Première méthode : en observant si les premiers termes sont justes. Ici $S_0 = 1$ et $S_1 = 28$. L'expression obtenue donne également ces résultats lorsqu'on remplace n par 0 puis n par 1 donc la formule semble correcte.

- Seconde méthode : avec le recul, vous apprendrez à aller regarder dans les questions qui suivent des éléments de vérification. En question 6, on observe qu'une expression de S_n est donnée. En la développant, on vérifie que l'on obtient le résultat. Ou, plus rapidement, on peut observer que -1 est racine évidente du second facteur de notre expression $(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1)$ donc on peut mettre $(n+1)$ en facteur et on obtient une expression de la forme : $S_n = (n+1)^2(ax^2 + bx + c)$. Nous voilà, une fois de plus, rassurés car on exhibe une expression qui ressemble à ce que l'on attend dans la question 6.

3. Technique très classique où l'on va scinder U_n en termes pairs et termes impairs. Voyons comment :

$$U_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (2n)^3 + (2n+1)^3$$

On regroupe alors les termes pairs d'un côté, les termes impairs de l'autre, comme suit :

$$U_n = [2^3 + 4^3 + ... + (2n)^3] + [1^3 + 3^3 + ... + (2n+1)^3]$$

On reconnaît alors T_n et S_n. On peut à présent conclure :

$$\boxed{U_n = S_n + T_n}$$

4. On a :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k)^3 = 8\sum_{k=0}^{n} k^3 = 8\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

D'où :

$$\boxed{T_n = 2n^2(n+1)^2}$$

Par ailleurs :

$$U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3 = \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4}$$

On remarque que $(2n+2)^2 = [2(n+1)]^2 = 4(n+1)^2$, ce qui nous permet de simplifier la fraction et de conclure :

$$\boxed{U_n = (n+1)^2(2n+1)^2}$$

5. En reprenant les résultats précédents, il vient :

$$S_n = U_n - T_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2[(2n+1)^2 - 2n^2]$$

Après simplification, on obtient :

$$\boxed{S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)}$$

Ce qui est très rassurant compte tenu de la question 6...

6. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$ » et montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :
On a bien $(0+1)^2((0+0+1) = 1 = S_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, i.e : $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.
Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e montrons que : $S_{n+1} = (n+2)^2[2(n+1)^2+4(n+1)+1]$.
On remarque que : $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3 + [2(n+1)+1]^3 = S_n + (2n+3)^3$.
On utilise alors l'hypothèse de récurrence et le binôme de Newton comme en question 2, et il vient :

$$S_{n+1} = (n+1)^2(2n^2+4n+1) + (8n^3+3\times 4n^2\times 3+3\times(2n)\times 9+27) = (n+1)^2(2n^2+4n+1)+(8n^3+36n^2+54n+27)$$

En développant cette expression d'un côté, puis $(n+2)^2[2(n+1)^2+4(n+1)+1]$ par ailleurs, on obtient la même expression (à faire pour les plus courageux), donc on a bien $S_{n+1} = (n+2)^2[2(n+1)^2+4(n+1)+1]$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on conclut, en ayant beaucoup souffert :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)}$$