EXERCICE I

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$.

1) Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$.

EXERCICE II

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = P(X = n)$, la fonction génératrice de X est $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

2) Démontrer que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $S = X_1+X_2$, démontrer que pour tout $t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = E(t^X)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

3) Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boules numérotée 2.

On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.

déterminer pour tout $t \in]-1, 1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

PROBLEME

Dans ce sujet une séries de fonctions L_a est une séries de fonctions $\sum_{n\geq1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\geq1}$ est une suite de nombres réels telle que la série entières $\sum_{n\geq1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I : Propriétés

Soit une une séries de fonctions L_a : $\sum_{n\geq1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$

4) Si $x \in]-1, 1[$, donner un équivalent de $1 - x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n\geq1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

<u>Remarque</u> : la série peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1, 1[$.

Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geq1}$ telle que L_a converge en au mois un x_0 n'appartient pas à l'intervalle $]-1, 1[$.

5) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans l'intervalle $]-1,1[$.

6) On pose pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur $]-1,1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

7) Expression sous forme de série entière

On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de nombres réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right), \text{ où } I_n = \{(k,p)\in A,\ kp = n\}$$

Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.

En déduire que $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{d/n} a_d$

(d/n signifiant d divise n).

Partie II : Exemples

8) Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

9) Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n.

Justifier que la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

On admet que pour $n \geq 1$, $n = \sum_{d/n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \dfrac{x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

10) En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

11) Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question $Q6$.

12) Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln(2)}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in]-1,1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}$.