Corrigé succinct EM Lyon ECS 2019

Partie A :

1) • soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\quad \deg(P) \leq n \quad \deg(P') \leq n-1$ donc $\deg((X-a)P') \leq n$

d'où $\deg(\varphi_a(P)) \leq n$ donc $\underline{\varphi_a(P) \in \mathbb{R}_n[X]}$

• soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi_a(P+\lambda Q) = 2(P+\lambda Q) + (X-a)(P+\lambda Q)' = 2P + \lambda.2Q + (X-a)(P' + \lambda Q')$$

$$\varphi_a(P+\lambda Q) = 2P + (X-a)P' + \lambda(2Q + (X-a)Q')$$

$$\varphi_a(P+\lambda Q) = \varphi_a(P) + \lambda\,\varphi_a(Q)$$

• Donc $\underline{\varphi_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$

2) • $\varphi_a(1) = 2.1$

• soit $k \in [\![1,n]\!]$ $\quad \varphi_a(X^k) = 2.X^k + (X-a).kX^{k-1}$

$$= (2+k)X^k - akX^{k-1}$$

D'où la matrice de φ_a dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
2 & -a & & & & 0\\
0 & 3 & \ddots & & (0) & \\
\vdots & 0 & \ddots & -ak & & \\
\vdots & & \ddots & 2+k & & \\
 & & (0) & & \ddots & -an\\
0 & 0 & \cdots & & & 2+n
\end{pmatrix} & \leftarrow k \\
\uparrow k &
\end{array}$$

3) a) la fonction $[0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2+x$ est affine donc bijective.

Donc $\forall (k,k') \in [\![0,n]\!]^2$ tel que $k \neq k'$ alors $2+k \neq 2+k'$

en conséquence, la matrice de φ_a dans la base canonique étant triangulaire supérieure et possédant $n+1$ termes 2 à 2 distincts sur la diagonale, φ_a possède $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$ donc $\underline{\text{diagonalisable}}$.

b) $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $\quad 2+k > 0$ donc 0 n'est pas valeur propre de φ_a donc φ_a injective et comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, $\underline{\varphi_a \text{ est un automorphisme}}$

c) Soit $k \in [\![0,n]\!]$ $\quad \underline{\varphi_a(Q_k)} = 2(X-a)^k + k(X-a)(X-a)^{k-1} = \underline{(2+k)Q_k}$

d) $\forall k \in [\![0,n]\!]$ Q_k est vecteur propre (car non nul) associé à la valeur propre $2+k$ (i

or ψ_a ayant $n+1$ valeurs propres distinctes, les sep sont de dimension 1, $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme une base de vecteurs propres

$\forall k \in [\![0,n]\!]$ $\quad \mathrm{Ker}(\psi_a - (2+k)\,id) = \mathrm{Vect}(Q_k)$

4 a) soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\quad ((X-a)^2 P(X))' = 2(X-a)P(X) + (X-a)^2 P'(X)$

$$((X-a)^2 P(X))' = (X-a)\,\psi_a(P)$$

b) soit $x \in \mathbb{R}$. $\quad$ • si $x = a$ $\quad \phi_a(\psi_a(P))(x) = \dfrac{\psi_a(P)(x)}{2} = \dfrac{2P(x)}{2} = P(x)$.

• si $x \neq a$ $\quad \phi_a(\psi_a(P))(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x (t-a)\,\psi_a(P)(t)\,dt$

$$= \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x ((t-a)^2 P(t))'\,dt$$

$$= \frac{1}{(x-a)^2}\left[(t-a)^2 P(t)\right]_a^x = P(x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \phi_a(\psi_a(P))(x) = P(x)$

d'où $\quad \phi_a(\psi_a(P)) = P$

c) . ϕ_a est trivialement linéaire

. $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $\quad \phi_a(\psi_a(Q_k)) = Q_k$ donc $\phi_a((2+k)Q_k) = Q_k$

or $2+k \neq 0$ $\quad$ donc $\quad \phi_a(Q_k) = \dfrac{Q_k}{2+k}$

Mais la famille $\left(\dfrac{Q_k}{2+k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (car $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ base)

Donc l'image par ϕ_a d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

ainsi ϕ_a est bien un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

et comme $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\quad \phi_a(\psi_a(P)) = P$ alors $\phi_a^{-1} = \psi_a$

d) $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme une base de vecteurs propres de ϕ_a puisque c'est une base et $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $\quad \phi_a(Q_k) = \dfrac{1}{2+k}\,Q_k$

les valeurs propres associées sont $\left\{ \dfrac{1}{2+k} \;/\; k \in [\![0,n]\!] \right\}$

Partie B

5. a) la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t f(t)$ est continue donc elle admet des primitives C^1

et h est la primitive s'annulant en 0 donc h est C^1 sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad h'(x) = x f(x)$

b) soit $x > 0$ $\quad f$ est continue sur $[0,x]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. donc, $\exists \alpha_x \in [0,x]$ tel $f(\alpha_x) = \min\limits_{t \in [0,x]} f(t)$ et $\exists \beta_x \in [0,x]$ tq $f(\beta_x) = \max\limits_{t \in [0,x]} f(t)$

$\forall t \in [0,x]$ $\qquad f(\alpha_x) \leq f(t) \leq f(\beta_x)$

donc $\qquad t f(\alpha_x) \leq t f(t) \leq t f(\beta_x)$

par croissance et positivité de l'intégrale $\quad \int_0^x t f(\alpha_x)\, dt \leq \int_0^x t f(t)\, dt \leq \int_0^x t f(\beta_x)\, dt$

soit $\qquad f(\alpha_x) \int_0^x t\, dt \leq h(x) \leq f(\beta_x) \int_0^x t\, dt.$ $\quad (*)$

c) soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$ $\qquad \frac{f(\alpha_x)}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{f(\beta_x)}{2}$ (en utilisant $(*)$)

Mais $\quad \alpha_x \in [0,x]$ $\quad$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \alpha_x = 0$

et par continuité de f $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(\alpha_x) = f(0)$

de même pour β_x $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(\beta_x) = f(0)$

Par théorème d'encadrement, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$

d) sur $[x,0]$ avec $x < 0$, le raisonnement précédent (b) et c)) s'applique et conduit au même résultat.

6) . si $x \neq 0$ $\quad \phi(f)(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ $\quad$ donc $\phi(f)$ continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues.

. $\lim\limits_{x \to 0} \phi(f)(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2} = \phi(f)(0)$ donc $\phi(f)$ continue en 0

d'où $\quad \phi(f)$ continue sur $\mathbb{R}$

$\phi(f)$ C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ en tant que quotient de fonctions C^1

et $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\qquad \phi(f)'(x) = -\frac{2}{x^3} \int_0^x t f(t)\, dt + \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(f(x) - 2\,\phi(f)(x)\right)$

7 a) supposons que f est paire. (resp impaire)

Soit $x \neq 0$ $\quad \phi(f)(-x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{-x} t f(t)\,dt$.

on effectue le changement de variable affine C^1, $u = -t$

$$\phi(f)(-x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{x} -u\, f(u)\,(-du) = \frac{1}{x^2}\int_0^{x} u\, f(u)\,du = \phi(f)(x)$$

donc $\underline{\phi(f) \text{ paire}}$ (impaire : m̂ démo)

b) On suppose $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$

soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad$ • si $x = 0$ $\quad \phi_a(f)(0) = \frac{f(0)}{2}$ et $f(0) \geq 0$

• si $x > 0$ $\quad \phi_a(f)(x)$ est positif car la fonction

$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$t \mapsto t f(t)$ est continue et positive sur $[0,x]$ donc par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $\phi_a(f)(x) \geq 0$

• si $x < 0$ $\quad \phi_a(f)(x) = -\frac{1}{x^2}\int_x^0 t f(t)\,dt$

or la fonction $\begin{array}{l}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto t f(t)\end{array}$ est continue et négative sur $[x,0]$

donc $\int_x^0 t f(t)\,dt \leq 0$ $\quad$ donc $-\frac{1}{x^2}\int_x^0 t f(t)\,dt \geq 0$

D'où $\underline{\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi_a(f)(x) \geq 0}$

8) a) la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

d'où $\lim_{x\to+\infty} \phi(g) = 0$ $\quad$ soit $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_0^x t\,(f(t) - \ell)\,dt = 0$

or $\frac{1}{x^2}\int_0^x t\,(f(t) - \ell)\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x t f(t)\,dt - \frac{\ell}{2} = \phi(f)(x) - \frac{\ell}{2}$

donc $\lim_{x\to+\infty} \phi(f)(x) - \frac{\ell}{2} = 0$ $\quad$ donc $\underline{\lim_{x\to+\infty} \phi(f)(x) = \frac{\ell}{2}}$

b) $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \ell$ car $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$

d'où $\lim_{x\to+\infty} \phi(h)(x) = \frac{\ell}{2}$ $\quad$ soit $\lim_{x\to+\infty} \phi(f)(-x) = \frac{\ell}{2}$

donc $\underline{\lim_{t\to-\infty} \phi(f)(t) = \frac{\ell}{2}}$ $\quad$ car $\lim_{t\to-\infty} -t = +\infty$

Partie C

9. Soit $x>0$, F est une fonction de répartition. Donc on a :

$\forall t \in [0,x] \qquad 0 \leq F(t) \leq F(x)$ car F est croissante

d'où $\qquad 0 \leq tF(t) \leq tF(x)$

On intègre entre 0 et x et par positivité croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $\quad 0 \leq \int_0^x tF(t)\,dt \leq \frac{x^2}{2} F(x)$

soit $\qquad 0 \leq \frac{2}{x^2}\int_0^x tF(t)\,dt \leq \frac{2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{2} F(x)$

d'où $\qquad \underline{0 \leq G(x) \leq F(x)}$

idem pour $x \in \mathbb{R}^{*-}$ en utilisant la croissance de F, $\forall t \in [x,0]$ $F(x) \leq F(t)$

donc $tF(x) \geq tF(t)$ car $t \leq 0$

d'où $\int_x^0 tF(x)\,dt \geq \int_x^0 tF(t)\,dt$ par croissance de l'intégrale.

d'où $\qquad -\int_0^x tF(x)\,dt \geq -\int_0^x tF(t)\,dt$

donc $\qquad \frac{1}{x^2}\int_0^x tF(x)\,dt \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x tF(t)\,dt$

soit $\qquad \underline{F(x) \leq G(x)}$

D'autre part $F(x) \geq 0$ car F est une fonction de répartition

d'où $\qquad \underline{0 \leq F(x) \leq G(x)}$

10. $\phi(F)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ d'après la partie B car F continue sur $\mathbb{R}$

donc $\underline{G = 2\phi(F) \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \mathbb{R}^{-*}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad G'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\left(F(x) - 2\phi(F)(x)\right)\right)$ d'après B

$$\underline{G'(x) = \frac{2}{x}\left(F(x) - G(x)\right)}$$

11. . G' est définie sur $\mathbb{R}$

. G' est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 en tant que quotient et différence de fonctions continues sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ car F et G sont continues sur ces ensembles car C^1

- si $x = 0$ $\quad G(0) \geq 0$
- si $x > 0$ $\quad G(x) \geq 0$ car $F(x) \geq G(x)$ et $x \geq 0$
- si $x < 0$ $\quad G(x) \geq 0$ car $F(x) - G(x) \leq 0$ et $x \leq 0$

donc $\frac{1}{x}(F(x) - G(x)) \geq 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad G(x) \geq 0$

G est positive.

- On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \phi(F)(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ (on utilise § 8 b)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(F)(x) = \frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Soient $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ avec $A < B$

$\int_A^B g(x) = G(B) - G(A)$ or $\lim\limits_{A \to -\infty} G(A) = 2 \lim\limits_{A \to -\infty} \phi(F)(A) = 0$

$\lim\limits_{B \to +\infty} G(B) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

donc $\lim\limits_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_A^B g(x)\,dx = 1$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut 1

Donc <u>g est une densité de probabilité</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad F_V(x) = \int_{-\infty}^{x} G'(t)\,dt = G(x) - \lim\limits_{A \to -\infty} G(A)$

or $\lim\limits_{A \to -\infty} G(A) = 0$

d'où $F_V(x) = G(x)$

<u>G est la fonction de répartition de V</u>

12) . h_1 est continue sur $\mathbb{R}$ car constante sur $\mathbb{R}^-$, produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\lim\limits_{x \to 0} 2x e^{-x^2} = 0 = h_1(0)$

. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad h_1(x) \geq 0$

. h_1 étant nulle sur $]-\infty, 0]$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} h_1(t)\,dt$ converge.

Soit $A > 0$ $\quad \int_0^A h_1(t)\,dt = \int_0^A 2xe^{-x^2}\,dx = \left[-e^{-x^2}\right]_0^A = 1 - e^{-A^2}$

$\lim_{A \to +\infty} e^{-A^2} = 1$ donc $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A h_1(t)\,dt = 1$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)\,dt$ converge et vaut 1

Donc $\underline{h_1 \text{ est une densité de probabilité}}$

b) X_1 admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x h_1(x)\,dx$ est absolument convergente. Donc comme h_1 est nulle sur $]-\infty, 0]$ et $x h_1(x)$ positif sur $[0, +\infty[$ alors X_1 admet une espérance $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x h_1(x)\,dx$ converge

or $x^2 e^{-x^2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car $\lim_{x \to +\infty} x^4 e^{-x^2} = 0$

Donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives $\int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2}\,dx$ converge et $\underline{X_1 \text{ admet une espérance}}$.

• On sait que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$ (*) moment d'ordre 2 d'une loi normale centrée réduite.

Effectuons le changement de variable C^1 et bijectif $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$ dans (*)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2u^2 e^{-u^2} \sqrt{2}\,du = 1$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} 2u^2 e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$

or la fonction $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ u \mapsto 2u^2 e^{-u^2} \end{array}$ est paire.

d'où $\int_0^{+\infty} 2u^2 e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2u^2 e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

d'où $\underline{E(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

c) $\begin{cases} H_1(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ H_1(x) = \int_0^x 2ue^{-u^2}\,du & \text{si } x > 0 \end{cases}$ soit $H_1(x) = 1 - e^{-x^2}$

Comme H_1 est une fonction de répartition, on utilise les résultats acquis au début de partie C

H_1 joue le rôle de F et H_2 celui de G

On a donc : . si $x = 0$ $\quad H_2(x) = 2H_1(x) = 0$

. si $x < 0$ $\quad H_2(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x t.0.\,dt = 0$

. si $x > 0$ $\quad H_2(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x t\left(1 - e^{-t^2}\right)dt$

$$= \frac{2}{x^2}\left(\left[\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}e^{-t^2}\right]\right)_0^x$$

$$= \frac{2}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{H_2(x)} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{e^{-x^2}}{x^2} = \underline{1 - \frac{(1 - e^{-x^2})}{x^2}}$$

On utilise les résultats de la partie C

Une densité de X_2 est donnée par la dérivée de H_2 en tous points où H_2 est C^1 et la valeur arbitraire 0 en 0

d'où $\quad h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ H_2'(x) = \frac{2}{x}\left(H_1(x) - H_2(x)\right) & \end{cases}$ $\quad$ (question 10)

d'où $\quad h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{x}\left(\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} - e^{-x^2}\right) & \end{cases}$

X_2 admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x h_2(x)\,dx$ absolument convergente et comme h_2 est nulle sur $]-\infty, 0]$ et $x h_2(x)$ positive sur $\mathbb{R}^+$ alors h_2 admet une espérance ssi $\int_0^{+\infty} x h_2(x)\,dx$ converge.

or $\quad \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^3}\,dx$ converge (Riemann)

$\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^3}e^{-x^2}\,dx$ converge car $\frac{2e^{-x^2}}{x^3} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\int \frac{2}{x}e^{-x^2}\,dx$ converge car $\frac{2}{x}e^{-x^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Donc $\quad \int_0^{+\infty} x h_2(x)\,dx$ converge et $\underline{X_2 \text{ admet une espérance}}$

<u>Partie D</u>. 13 a) soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} \cdot\ (x+y)^2 \geq 0 & \text{donc } \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq -xy \\ \cdot\ (x-y)^2 \geq 0 & \text{donc } \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq xy \end{cases}$

d'où $\underline{\frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq |xy|}$

b) soit $(f,g) \in E_2^2$ alors $\forall x \in [0,+\infty[$ $\underline{0 \leq |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(f(x))^2 + \frac{1}{2}(g(x))^2}$

Or la fonction $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |f(t)g(t)|$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} |f(x)g(x)|\,dx$ est impropre en $+\infty$

Mais $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} g^2(x)\,dx$ convergent donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives $\underline{\int_0^{+\infty} |f(x)g(x)|\,dx \text{ converge}}$.

14 . E_2 est non vide car la fonction nulle $0_{\mathbb{R}}$ vérifie $\int_0^{\infty} (0_{\mathbb{R}}(t))^2\,dt$ converge.

. $E_2 \subset E$ par définition

. soit $(f,g) \in E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq ((f+\lambda g)(x))^2$

et $((f+\lambda g)(x))^2 = (f(x))^2 + \lambda^2 (g(x))^2 + 2\lambda f(x) g(x)$

$\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,dx$ converge car $f \in E_2$

$\int_0^{+\infty} (g(x))^2\,dx$ converge car $g \in E_2$

$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ converge d'après 13 b

donc $\int_0^{+\infty} ((f+\lambda g)(x))^2\,dx$ converge comme somme d'intégrales cv

D'où $f+\lambda g \in E_2$

<u>E_2 est un sev de E</u>

15 • $<\,,\,>$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$

• $<\,,\,>$ est trivialement symétrique.

• soit $(f,g,h) \in E_2^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad <f, \lambda g + h> = \int_0^{+\infty} f(x)(\lambda g(x) + h(x))\,dx$

$= \lambda \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)h(x)\,dx$

car toutes ces intégrales convergent

donc $<\,,\,>$ linéaire à droite et comme il est symétrique, il est bilinéaire.

. Soit $f \in E_2$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (f(t))^2 \geq 0$

donc par positivité de l'intégrale impropre convergente d'une fonction continue $\int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt \geq 0$ donc $< f, f > \geq 0$

. Soit $f \in E_2$ telle que $\int_0^{+\infty} f^2(t)\, dt = 0$

comme la fonction $t \mapsto (f(t))^2$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ alors par corollaire du théorème de positivité de l'intégrale, $\forall t \in \mathbb{R}^+ \ (f(t))^2 = 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f(t) = 0$ et f est la fonction nulle de $\mathbb{R}^+$

d'où $< , >$ est un produit scalaire.

16 a $\forall x > 0 \quad \dfrac{(h(x))^2}{x^4} = \left(\dfrac{h(x)}{x^2}\right)^2$

or d'après B $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{h(x)}{x^2} = \dfrac{f(0)}{2}$

donc par continuité de la fonction carré, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(h(x))^2}{x^4} = \dfrac{(f(0))^2}{4}$

$\dfrac{(h(x))^2}{x^3} = x \cdot \left(\dfrac{h(x)}{x^2}\right)^2$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(h(x))^2}{x^3} = 0$

b Soit $X > 0$
soit $X > \varepsilon > 0$

posons . $u : [\varepsilon, X] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (h(t))^2$ $\quad u$ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, d'après B donc C^1 sur $[\varepsilon, X]$

NB : h est C^1 donc par produit $h \cdot h$ est C^1

et $\forall t \in [\varepsilon, X] \quad u'(t) = 2h(t)h'(t)$

$v : [\varepsilon, X] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto -\dfrac{1}{3t^3}$ $\quad v$ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $[\varepsilon, X]$

et $\forall t \in [\varepsilon, X] \quad v'(t) = \dfrac{1}{t^4}$

d'où $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{(h(x))^2}{x^4} dx = \left[-\frac{1}{3t^3}(h(t))^2\right]_\varepsilon^X + \frac{1}{3}\int_\varepsilon^X \frac{2h(t)h'(t)}{t^3} dt$

. $\left[-\dfrac{1}{3t^3}(h(t))^2\right]_\varepsilon^X = -\dfrac{1}{3X^3}(h(X))^2 + \dfrac{1}{3\varepsilon^3}(h(\varepsilon))^2$

or $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{1}{\varepsilon^3}(h(\varepsilon))^3 = 0$

. $\forall t \in [\varepsilon, X] \quad \dfrac{h(t)h'(t)}{t^3} = \dfrac{h(t) \cdot t f(t)}{t^3} = f(t) \cdot \dfrac{h(t)}{t^2}$

$= f(t) \cdot \dfrac{1}{t^2} \displaystyle\int_0^t u f(u)\, du = f(t)\, \Phi(f)(t)\, dt$
car $t > 0$

d'où

(11)

$$\int_\varepsilon^X \frac{(h(x))^2}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3X^3}(h(X))^2 + \frac{1}{3\varepsilon^3}(h(\varepsilon))^2 + \frac{2}{3}\int_\varepsilon^X f(t)\,\phi(f)(t)\,dt \quad (*)$$

or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(h(x))^2}{x^4} = \frac{f(0)^2}{4}$ donc l'intégrale $\int_0 \frac{(h(x))^2}{x^4}dx$ est faussement impropre en 0 donc convergente.

. cela implique que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{2}{3}\int_\varepsilon^X f(t)\,\phi(f)(t)\,dt$ converge (évident car $\phi(f)$ continue) d'où en faisant tendre ε vers 0 dans $(*)$

$$\int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3X^3}(h(X))^2 + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx.$$

c) soit $X>0$ soit $\lambda \in \mathbb{R}$ f et $\phi(f)$ étant continues, $(\lambda f + \phi(f))^2$ continue et positive sur $[0,X]$ donc par positivité de l'intégrale.

$$P(\lambda) = \int_0^X (\lambda f(x) + \phi(f)(x))^2\,dx \geq 0$$

soit $\lambda^2 \int_0^X (f(x))^2 dx + 2\lambda \int_0^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx + \int_0^X (\phi(f)(x))^2 dx \geq 0$

cette expression polynomiale du second degré admet donc au plus une seule racine réelle, son discriminant Δ est négatif ou nul

or $\Delta = 4\left(\int_0^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx\right)^2 - 4\int_0^X (f(x))^2 dx \int_0^X (\phi(f)(x))^2 dx$

d'où en divisant par 4 $\left(\int_0^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^X (f(x))^2 dx \int_0^X (\phi(f)(x))^2 dx.$

comme les 2 intégrales de droite sont positives

$$\int_0^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx \leq \left(\int_0^X (f(x))^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^X (\phi(f)(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

d) soit $X>0$ La fonction polynomiale précédente est toujours positive et admet un minimum au seul λ_0 où sa dérivée s'annule.

inutile

$$P'(\lambda_0) = 0 \iff 2\lambda_0 \int_0^X (f(x))^2 dx + 2\int_0^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx = 0$$

. si f est la fonction nulle, on a $\phi(f) = 0_{\mathbb{R}}$ et la formule d est vraie.

. on suppose f n'est pas la fonction nulle. donc $\int_0^X (f(x))^2 dx > 0$

$$\lambda_0 = -\frac{\int_0^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx}{\int_0^X (f(x))^2\,dx}$$

pas utile

$\int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4}\,dx = \int_0^X (\phi(f)(x))^2\,dx$ et $\int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4}\,dx \leq \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\,\phi(f)(x)\,dx$ d'après 16 b

donc $\int_0^X (\phi(f)(x))^2\,dx \leq \frac{2}{3}\int_0^X (f(x)\,\phi(f)(x))\,dx \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^X f(x)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^X (\phi(f)(x))^2\,dx\right)^{1/2}$

- si f est la fonction nulle 16 d est toujours vraie
- si $f \neq 0_{\mathbb{R}}$, $\phi(f) \neq 0_{\mathbb{R}}$ donc $\int_0^X (\phi(f)(x))^2\,dx > 0$ et on peut diviser l'égalité par $\left(\int_0^X (\phi(f)(x))^2\,dx\right)^{1/2}$

(e) d'après B $\phi(f)$ est continue. et $\forall X > 0$ $0 \leq \int_0^X (\phi(f)(x))^2\,dx \leq \frac{4}{9}\int_0^X (f(x))^2\,dx$

or $\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,dx$ converge donc $\forall X > 0$ $\frac{4}{9}\int_0^X (f(x))^2\,dx \leq \frac{4}{9}\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,dx$

(car $t \mapsto f(t)^2$ positive)

d'où $\forall X > 0$ $\int_0^X (\phi(f)(x))^2\,dx \leq \frac{4}{9}\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,dx$.

la fonction croissante $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $X \mapsto \int_0^X (\phi(f)(x))^2\,dx$ est majorée

donc $\int_0^{+\infty} (\phi(f)(x))^2\,dx$ converge donc $\phi(f) \in E_2$

En faisant tendre X vers $+\infty$ dans 16 d on a $\|\phi(f)\| \leq \frac{2}{3}\|f\|$

(f) soit $X > 0$ $X(\phi(f)(X))^2 = X \cdot \frac{(h(X))^2}{(X^2)^2} = \frac{(h(X))^2}{X^3}$

or on sait que $\int_0^{\infty} f(t)\,\phi(f)(t)\,dt$ est absolument convergente

car f et $\phi(f)$ appartiennent à E_2.

D'autre part, $\int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4}\,dx = \int_0^X (\phi(f)(x))^2\,dx$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{(h(x))^2}{x^4}\,dx$ converge.

Ainsi nécessairement $X(\phi(f)(X))^2$ admet une limite finie

sinon $\int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4}\,dx$ ne pourrait pas converger.

- supposons cette limite $\ell \neq 0$ alors $X\phi(X)^2 \underset{+\infty}{\sim} \ell$

d'où $\phi(X)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{X}$ or $\int_0^{+\infty} \frac{\ell}{t}\,dt$ diverge

et $\int_0^{+\infty} (\phi(x))^2\,dx$ converge, ce qui est contradictoire donc $\ell = 0$

(g) On a $\int_0^{+\infty} \frac{(h(x))^2}{4}\,dx = \int_0^{+\infty} (\phi(f)(x))^2\,dx = \|\phi(f)\|^2$

On passe à la limite dans 16 b $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{(h(X))^2}{X^3} = \lim\limits_{X\to+\infty} X(\phi(f)(X))^2 = 0$

d'où $\|\phi(f)\|^2 = \frac{2}{3}\int_0^{\infty} f(t)\,\phi(f)(t)\,dt = \frac{2}{3}\langle f, \phi(f)\rangle$

Partie D

17)

```
function v = suite_v(n)
  v = 0
  for k = 1 : n
  v = v + k * suite_u(k)
  end
  v = v * 1/(n*(n+1))
endfunction
```

18) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle est donc convergente par théorème de la limite monotone.

b) On peut conjecturer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et si ℓ est sa limite alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{\ell}{2}$

(valable aussi pour $u_n = e^{-n}$ car $\ell = 0$ et $\frac{\ell}{2} = 0$)

c) . soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![1, n]\!]$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $u_k \geq u_n$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k \geq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right) u_n$

soit $\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k \geq \frac{n(n+1)}{2} u_n$

d'où $v_n \geq \frac{u_n}{2}$

. soit $n \in \mathbb{N}^*$ $v_{2n} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k\right) \frac{1}{2n(2n+1)} + \frac{1}{2n(2n+1)} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} k u_k$

$$v_{2n} = \frac{n(n+1)}{2n(2n+1)} v_n + \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k u_k$$

Mais $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$ $u_k \leq u_{n+1}$

donc $v_{2n} \leq \frac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \frac{1}{2n(2n+1)} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k\right) u_{n+1}$

or $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k = \frac{n(3n+1)}{2}$

d'où $v_{2n} \leq \frac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}$

soit $n \in \mathbb{N}^*$

d) $\cdot$ $(n+2)\, v_{n+1} = \dfrac{n+2}{(n+1)(n+2)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k u_k = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k u_k$

$$n v_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k u_k + \frac{n+1}{n+1} u_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k u_k \right) \frac{1}{n+1} = (n+2)\, v_{n+1}$$

donc $\underline{(n+2)\, v_{n+1} = n v_n + u_{n+1}}$

$\cdot$ $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} k u_k - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

$$= \frac{u_{n+1}}{n+2} + \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{u_{n+1}}{n+2} - \frac{2 \sum_{k=1}^{n} k u_k}{(n+1)\, n\, (n+2)}$$

$$= \frac{u_{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+1} - \frac{2}{n} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} k u_k - \frac{1}{n+2} u_{n+1} \right)$$

$$= \frac{u_{n+1}}{n+2} \left(1 + \frac{2}{n} \right) - \frac{2}{n} v_{n+1}$$

$$= \frac{u_{n+1}}{n+2} \left(\frac{n+2}{n} \right) - \frac{2}{n} v_{n+1}$$

d'où $$\underline{v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} \left(u_{n+1} - 2 v_{n+1} \right)}$$

e) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n \geq \dfrac{u_n}{2}$ donc $v_{n+1} \geq \dfrac{u_{n+1}}{2}$ donc $u_{n+1} - 2 v_{n+1} \leq 0$

ainsi $v_{n+1} - v_n \leq 0$

<u>La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.</u>

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n \geq \dfrac{u_n}{2} \geq 0$ donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ minorée par 0

<u>donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge</u>

soit m sa limite et soit l la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n \geq \frac{u_n}{2}$ donc par conservation des inégalités au passage à la limite $\quad m \geq \frac{\ell}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = m$ (suite extraite d'une suite convergente)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} v_n = \frac{m}{4}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1} = \frac{3}{8}\ell$

donc par conservation des inégalités $\quad m \leq \frac{m}{4} + \frac{3}{8}\ell$

d'où $\quad \frac{3}{4} m \leq \frac{3}{8}\ell \quad$ donc $\quad m \leq \frac{\ell}{2}$

donc $\quad \frac{\ell}{2} \leq m \leq \frac{\ell}{2} \quad$ d'où $\quad m = \frac{\ell}{2}$

19 a) soit $N \in \mathbb{N}^*$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k = \sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k u_k}{n(n+1)}$

$1 \leq k \leq n \leq N$ $\quad$ d'où $\quad \sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{n=k}^{N} \frac{k u_k}{n(n+1)}$

$$= \sum_{k=1}^{N} k u_k \cdot \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k u_k \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k u_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} u_k - \sum_{k=1}^{N} \frac{k u_k}{N+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} u_k - N \frac{1}{N(N+1)} \sum_{k=1}^{N} k u_k$$

d'où $\quad \underline{\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - N v_N}$

(b) $\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{N} v_n \leq \sum_{n=1}^{N} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ car $\sum_{n\geq 1} u_n$ série positive convergente.

or $\sum_{k\geq 1} v_k$ est une série à termes positifs, la suite de ses sommes partielles est majorée donc la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

(c) $\forall N \in \mathbb{N} \quad N v_N = \sum_{k=1}^{N} v_k - \sum_{k=1}^{N} u_k$

comme $\sum_{k=1}^{N} v_k$ et $\sum_{k=1}^{N} u_k$ sont des suites convergentes alors $(N v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge

Supposons que $\lim_{N\to+\infty} N v_N = \ell$ avec $\ell \neq 0$ $(\ell > 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n \geq 0)$

alors $v_N \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{N}$

or la série $\sum_{N\geq 1} \frac{\ell}{N}$ diverge donc par théorème d'équivalence, la série $\sum_{N\geq 1} v_N$ devrait diverger, ce qui n'est pas le cas

donc $\ell = 0$

(d) On passe à la limite qd N tend vers $+\infty$ dans 19 (a) et on obtient
$$\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

20 (a) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad p_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, P(Y = k)$

Montrons que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilités

. $\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad P(Y = k) \leq 1$ donc $p_n \leq \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k$

donc $p_n \leq \frac{1}{2} \leq 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq p_n \leq 1$

posons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = P(Y = n)$$

$$v_n = p_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge

donc, d'après 19 d) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge

et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$

p_n définit bien une loi de probabilité discrète

b) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = E(Y)$

donc $\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) \underset{+\infty}{\sim} \frac{E(Y)}{n^2}$

d'où $P(Z=n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{E(Y)}{n^2}$ ($E(Y) > 0$ car Y à valeurs ds $\mathbb{N}^*$)

$$nP(Z=n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{E(Y)}{n}$$

or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

donc par théorème d'équivalence, la série à termes positifs

$\sum_{n\geq 1} nP(Z=n)$ diverge donc Z n'admet pas d'espérance.