myPRΣPA

Compte-rendu de séance

LUNDI 6 MAI 2019 17:31 1H17

Mathématiques - ESSEC 2019 E2 - analyse by Olivier

RÉUNION

Responsable de la séance

Olivier SARFATI - PROF PROFESSEUR

Exemplaire de Julie ADMINISTRATEUR - ADMINISTRATEUR

Publié le 07/05/2019

Participants		Présence totale	Présence partielle	Absence
LECOUTRE Ken	ADMINISTRATEUR	✓		
LECOUTRE Ken	PROFESSEUR			✗
2		1	0	1

Calcul des présences : Les étudiants sont considérés comme totalement présents s'ils se sont connectés à la salle de classe dans les 5 premières minutes après le début initialement programmé et sont restés jusqu'à la fin programmée de la séance (pendant les 3 dernières minutes). Les étudiants partiellement présents se sont connectés avec un retard qui dépassait les 5 premières minutes ou ont quitté la salle de classe plus tôt que 3 minutes avant la fin programmée. Les étudiants absents ne se sont jamais connectés à la salle de classe.

Conception : ESSEC BS

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES II

Lundi 6 mai 2019, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Un modèle probabiliste d'une expérience aléatoire représente dans un certain sens le désordre qui intervient dans l'expérience et il est donc naturel que des outils soient introduits qui permettent de mesurer l'intensité de ce désordre. C'est le cas de la notion d'entropie qui fait l'objet du présent problème. On considèrera différentes situations et notamment la façon dont on mesure l'information que deux variables aléatoires s'apportent mutuellement.

Dans la première partie on étudie le cas plus simple techniquement de variables dont la loi admet une densité. Les deuxièmes et troisièmes parties sont consacrées au cas discret. Dans la deuxième partie, on introduit les différentes notions d'entropie pour le cas de variables discrètes et dans la troisième partie, on examine comment on peut mesurer l'information apportée mutuellement par deux variables aléatoires.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour toute variable aléatoire Y, on notera $E(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.

Première partie : **Entropie différentielle d'une variable à densité**

1) La fonction logarithme de base 2, notée $\log_2$, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$.
   (a) Montrer que pour tout (x, y) élément de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a $\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$.
   (b) Vérifier que pour tout réel α, $\log_2(2^\alpha) = \alpha$.
   (c) Montrer que la fonction $\log_2$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

1/6

Tournez la page S.V.P.

2) Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit f une densité de X. On appelle **support** de f l'ensemble $I = \{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$, et on suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b ($a < b$, a et b finis ou infinis). L' **entropie différentielle** de X est, sous réserve d'existence, le réel

$$h(X) = -\int_a^b f(x)\log_2 f(x)dx.$$

Th transfert

Montrer que $h(X) = -E(\log_2 f(X))$.

3) Soit X une variable aléatoire de densité f de support I, intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b. On suppose que X admet une entropie différentielle.

(a) Soit c un réel, et soit Y la variable aléatoire définie par $Y = c + X$.

i) Déterminer une densité de Y.

ii) Justifier l'existence de l'entropie différentielle $h(Y)$, et la déterminer en fonction de $h(X)$.

(b) Soit α un réel strictement positif, et soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \alpha X$.

i) Déterminer une densité de Z.

ii) Justifier l'existence de l'entropie différentielle $h(Z)$, et la déterminer en fonction de $h(X)$.

4) On détermine dans cette question l'entropie différentielle de quelques variables aléatoires suivant des lois classiques.

(a) Soit $a > 0$. On considère X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, a]$.

i) Donner une densité de X.

ii) Justifier l'existence de l'entropie différentielle $h(X)$, et la déterminer.

iii) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $h(X) > 0$.

(b) On considère Y une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Montrer que Y admet une entropie différentielle et que $h(Y) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e)$.

(c) On considère Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). Justifier l'existence de l'entropie différentielle $h(Z)$ et la déterminer.

(d) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}$ ($\lambda > 0$). → cf HEC 2007

i) Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

ii) Soit W une variable aléatoire de densité f. Justifier l'existence de l'entropie différentielle $h(W)$ et la déterminer.

5) On dit qu'un couple (X, Y) de variables aléatoires est un couple gaussien centré si, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha X + \beta Y$ est une variable de loi normale centrée, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et une variable aléatoire Z de loi normale centrée réduite tels que $\alpha X + \beta Y$ a même loi que γZ. On considère un tel couple (X, Y) et on note σ^2 la variance de X. On suppose que $\sigma^2 > 0$.

(a) Montrer que X suit une loi normale centrée.

(b) Calculer $h(X)$. → linéarité, KH ?

(c) On suppose désormais que X et Y suivent la même loi normale centrée de variance σ^2 et on admet que les propriétés de l'espérance des variables discrètes se généralisent aux variables aléatoires quelconques.

i) Montrer que $E(XY)$ existe.

ii) Montrer de plus que pour tout réel λ, $\lambda^2E(Y^2) + 2\lambda E(XY) + E(X^2) \geq 0$. $= (\lambda E(Y) + E(X))^2$

iii) En déduire que $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$.

iv) On pose $\rho = E(XY)/\sigma^2$. Montrer que $\rho \in [-1, 1]$.

v) Que vaut ρ si X et Y sont indépendantes ?

$\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$

ESSEC 2001

(d) On suppose $|\rho| < 1$. On appelle **entropie jointe** du couple (X, Y) le réel

$$h(X,Y) = \log_2(2\pi e \sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}).$$

i) A quelle condition $h(X,Y)$ est-elle nulle ?

ii) L' **information mutuelle** de X et Y est définie par

$$I(X,Y) = h(X) + h(Y) - h(X,Y).$$

Calculer $I(X,Y)$.

iii) Montrer que $I(X,Y) \geq 0$.

iv) Quelle est la limite de $I(X,Y)$ quand ρ tend vers 1 ?

Deuxième partie : **Généralités sur l'entropie des variables discrètes**

Soit A un ensemble fini non vide. On dit que X est une variable aléatoire dont la loi est à support A, si X est à valeurs dans A et si pour tout $x \in A$, $P(X = x) > 0$.

6) Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ où n est un entier naturel. On appelle **entropie** de X le réel

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{n} P(X=k)\log_2 P(X=k).$$

(a) On définit la fonction $g : \{0, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ en posant $g(k) = \log_2 P(X = k)$ pour k élément de $\{0, 1, \ldots, n\}$. Montrer que $H(X) = -E(g(X))$.

(b) Montrer que $H(X) \geq 0$.

(c) Soit p un réel tel que $0 < p < 1$. On suppose dans cette question que X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

i) Calculer $H(X)$ en fonction de p. On note ψ la fonction qui, à p, associe $H(X)$.

ii) Montrer que ψ est concave sur $]0, 1[$.

iii) Déterminer la valeur p_0 où ψ est maximale.

(d) On suppose dans cette question que la loi de X est à support $\{0, 1, 2, 3\}$ avec les probabilités

$$P(X=0) = 1/2; P(X=1) = 1/4; P(X=2) = P(X=3) = 1/8.$$

Calculer $H(X)$.

Scilab

7) On souhaite écrire une fonction en Scilab pour calculer l'entropie d'une variable aléatoire X dont le support de la loi est de la forme $A = \{0, 1, \ldots, n\}$ où n est un entier naturel. On suppose que le vecteur P de Scilab est tel que pour tout k de A, `P(k + 1)` $= P(X = k)$. Compléter la fonction ci-dessous d'argument P qui renvoie l'entropie de X, c'est-à-dire $-\sum_{k=0}^{n} P(X=k)\log_2 P(X=k)$.

```
function h = Entropie(P)
    ...
endfunction
```

Si nécessaire, on pourra utiliser l'instruction `length(P)` qui donne le nombre d'éléments de P.

On souhaite maintenant démontrer quelques inégalités concernant l'entropie.

8) On commence par une inégalité générale, appelée **Inégalité de Jensen.**

(a) Soit $N \geq 2$. Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ où les x_i sont des éléments distincts de $\mathbb{R}_+$. On pose $P(X = x_i) = p_i$. Montrer que pour tout $1 \leq i \leq N$, on a $p_i < 1$.

Tournez la page S.V.P.

On désire démontrer par récurrence la propriété suivante

$\mathcal{P}(N)$: **Pour toute φ fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$, si X une variable aléatoire de loi à support $A \subset \mathbb{R}_+$ avec Card $A = N$, on a $E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X))$.**

Convexité

(b) Montrer que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

(c) Soit $N \geq 3$. On suppose que $\mathcal{P}(N-1)$ est vérifiée. Soit X une variable aléatoire de loi à support $A = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ où les x_i sont des éléments distincts de $\mathbb{R}_+$. On pose $P(X = x_i) = p_i$.
Pour i tel que $1 \leq i \leq N-1$, on pose $p'_i = \dfrac{p_i}{1 - p_N}$.

i) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} p'_i = 1$ et $0 < p'_i < 1$ pour $1 \leq i \leq N-1$.

ii) Soit Y une variable aléatoire de loi à support $\{x_1, \dots, x_{N-1}\}$ telle que $P(Y = x_i) = p'_i$ pour $1 \leq i \leq N-1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} p'_i \varphi(x_i) \geq \varphi\Big(\sum_{i=1}^{N-1} p'_i x_i\Big)$.

iii) Montrer que $E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X))$.

(d) Montrer que si φ est *concave* sur $\mathbb{R}_+$, on a $E(\varphi(X)) \leq \varphi(E(X))$.

9) Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{0, 1, \dots, n\}$. On pose, pour k tel que $0 \leq k \leq n$, $p_k = P(X = k)$.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \log_2 \frac{1}{(n+1)p_k} \leq \log_2 \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n+1)p_k} = 0$.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \log_2[(n+1)p_k] = \log_2(n+1) - H(X)$.

(c) Montrer que $H(X) \leq \log_2(n+1)$.

(d) On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$. Calculer $H(X)$.

10) Soient X et Y deux variables aléatoires *de même loi* à support $\{0, 1, \dots, n\}$. On suppose en outre X et Y indépendantes.

(a) Montrer que $P(X = Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (P(X = k))^2$.

(b) On pose $v(k) = P(X = k)$ pour tout k élément de $\{0, 1, \dots, n\}$. Montrer que

$$2^{E(\log_2 v(X))} \leq E(2^{\log_2 v(X)}) = E(v(X)).$$

(c) En déduire que $2^{-H(X)} \leq P(X = Y)$.

(d) Donner un exemple de loi où l'inégalité précédente est une égalité.

Troisième partie : Entropie jointe et information mutuelle de deux variables discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires de lois à support $\{0, 1, \dots n\}$. On appelle **entropie jointe** de X et Y le réel

$$H(X, Y) = -\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} P([X = k] \cap [Y = j]) \log_2 P([X = k] \cap [Y = j]),$$

avec la convention $0 \log_2 0 = 0$.

11)

(a) On définit la fonction $g : \{0, 1, \ldots, n\}^2 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en posant pour $(k, j) \in \{0, 1, \ldots, n\}^2$

$$g(k, j) = \log_2 P([X = k] \cap [Y = j]).$$

Montrer que $H(X, Y) = -E(g(X, Y))$.

(b) Montrer que $H(X, Y) = H(Y, X)$.

(c) Pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$, on pose

$$H(Y/X = k) = -\sum_{j=0}^{n} P_{[X=k]}(Y = j) \log_2 P_{[X=k]}(Y = j).$$

On appelle **entropie conditionnelle** de Y sachant X le réel

$$H(Y/X) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) H(Y/X = k).$$

Montrer que $H(X, Y) = H(X) + H(Y/X)$.

(d) Montrer que pour tout couple de variables aléatoires X et Y de lois à support $\{0, 1, \ldots n\}$, on a

$$H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X).$$

12) On considère dans cette question deux variables aléatoires de lois à support $\{0, 1, 2, 3\}$. On suppose que la loi conjointe de (X, Y) est donnée par le tableau suivant

$j \backslash k$	0	1	2	3
0	1/8	1/16	1/32	1/32
1	1/16	1/8	1/32	1/32
2	1/16	1/16	1/16	1/16
3	1/4	0	0	0

(on lit dans la k-ième colonne et la j-ième ligne la valeur de $P([X = k] \cap [Y = j])$).

(a) Déterminer la loi de X et montrer que $H(X) = 7/4$.

(b) Déterminer la loi de Y et calculer $H(Y)$.

(c) Montrer que $H(X/Y) = 11/8$.

(d) Que vaut $H(Y/X)$?

(e) Calculer $H(X, Y)$.

13) Soient X et Y deux variables aléatoires de lois à support $\{0, 1, \ldots, n\}$. On appelle **information mutuelle** de X et de Y le réel

$$I(X, Y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} P([X = k] \cap [Y = j]) \log_2 \frac{P([X = k] \cap [Y = j])}{P(X = k) P(Y = j)}.$$

(a) Montrer que $I(X, Y) = I(Y, X)$.

(b) Montrer que $I(X, Y) = H(X) - H(X/Y)$.

(c) Montrer que $I(X, X) = H(X)$.

(d) Que vaut $I(X, Y)$ si X et Y sont indépendantes ?

Tournez la page S.V.P.

14) Soient X et Y deux variables aléatoires de lois à support $\{0, 1, \ldots, n\}$. On fixe $0 \leq k \leq n$. Pour $0 \leq j \leq n$, on pose $p_j = \dfrac{P([X = k] \cap [Y = j])}{P(X = k)}$. On suppose que $p_j > 0$ pour tout $0 \leq j \leq n$ et on pose $x_j = \dfrac{P(X = k)P(Y = j)}{P([X = k] \cap [Y = j])}$.

(a) Montrer que $\sum_{j=0}^{n} p_j = 1$.

(b) Soit Z_k une variable aléatoire de loi à support $\{x_0, \ldots, x_n\}$ dont la loi est donnée par $P(Z_k = x_j) = p_j$ pour $0 \leq j \leq n$. Montrer que

$$E(\log_2 Z_k) \leq 0.$$

(c) En déduire que $I(X, Y) \geq 0$.

ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option économique

MATHEMATIQUES II

Vendredi 4 Mai 2001 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord de façon générale (partie I), puis dans un cas particulier (partie II).

PARTIE I

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (on rappelle que $V(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante).
La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))], \text{ ou encore } E(XY) - E(X)E(Y).$$

1°) Covariance des variables aléatoires X et Y

a) Exprimer $\mathrm{Cov}(\lambda X+Y, \lambda X+Y)$ en fonction de $V(\lambda X+Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$V(\lambda X+Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) En déduire que $(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 \le V(X)V(Y)$.
A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$?

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL.: 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR
ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PRIVE RECONNU PAR L'ETAT. MEMBRE DE LA FESIC

ESSEC BUSINESS SCHOOL
ETABLISSEMENTS PRIVES D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR. ASSOCIATION LOI 1901.
ACCREDITES AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR MANAGEMENT EDUCATION
AFFILIES A LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE VERSAILLES VAL D'OISE-YVELINES

2°) Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

On suppose dans cette question les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y strictement positives.

a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1, +1]$.

Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

c) On suppose enfin que X suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ et que $Y = X^2$.
Préciser les espérances et les variances de X et Y ainsi que la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y. Etudier alors la réciproque de la question 2°(b).

PARTIE II

1°) Calculs préliminaires

a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geq q$.
En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^{n} C_k^q = C_{n+1}^{q+1}.$$

b) En faisant $q = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des quatre sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad ; \quad \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2).$$

On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geq 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :

- N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré.
- N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré.
- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés.
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

On note $E(N_1)$ et $V(N_1)$, $E(N_2)$ et $V(N_2)$, $E(X)$ et $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$ les espérances et variances des quatre variables aléatoires N_1, N_2, X, Y.

2°) Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2

a) Déterminer les probabilités $P(N_1 = i)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $P(N_2 = j \,/\, N_1 = i)$ pour $1 \leq j \leq n, j \neq i$.
En déduire $P(N_2 = j)$ pour $1 \leq j \leq n$, puis comparer les lois de N_1 et N_2.

b) Calculer les espérances $E(N_1)$ et $E(N_2)$, les variances $V(N_1)$ et $V(N_2)$.

c) Déterminer les probabilités $P(N_1 = i \cap N_2 = j)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ en distinguant les deux cas $i = j$ et $i \neq j$ et en déduire que :

$$E(N_1 N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2.

d) Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $V(N_1 + N_2)$.

3°) Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables aléatoires X et Y

a) Montrer que les probabilités $P(X = i \cap Y = j)$ sont égales à $\dfrac{2}{n(n-1)}$ pour $1 \leq i < j \leq n$.

Que valent-elles sinon?

3) a) i) $X(\Omega) = I = [a,b]$
$[a,b[$
!

méth : fonction de répartition
$F_Y \rightarrow Y$
$F_X \rightarrow X$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X+c \leq x)$
$= P(X \leq x-c) = F_X(x-c)$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x-c < a \\ \int_{-\infty}^{x-c} f(t)\,dt \text{ si } x-c \in [a,b) \\ 1 \text{ si } x-c > b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x < a+c \\ \int_{\cancel{a+c}}^{x-c} f(t)\,dt \text{ si } x \in [a+c, b+c] \\ 1 \text{ si } x > b+c \end{cases}$$

F dérivable sur $]-\infty, a+c[\cup]a+c, b+c[\cup]b+c, +\infty[$

$$F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a+c \\ f(x-c) \text{ si } x \in]a+c, b+c[\\ 0 \text{ si } x > b+c \end{cases}$$

Ainsi, on peut définir f_Y telle que

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a+c \\ f(x-c) \text{ si } x \in [a+c, b+c] \\ 0 \text{ si } x > b+c \end{cases}$$

4) d) • f continue sur $\mathbb{R}$ (1)

• f positive sur $\mathbb{R}$ (2)

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$?

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}_{\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda(-x)}\,dx} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt}_{\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

5) a) on veut mq $E(X)=0$?

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ $\alpha X+\beta Y$ m̂ loi que σZ

avec $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

idée : $\alpha=1$ et $\beta=0$

X m̂ loi que σZ

$E(\sigma Z)=\sigma E(Z)=0$

$\Rightarrow \boxed{E(X)=0}$

5) c) i) $E((X+Y)^2)$

$\alpha=1, \beta=1$ $X+Y$ m̂ loi que σZ

$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow X+Y$ admet 1 espérance
1 variance

$\Rightarrow$ 1 moment d'ordre 2

ie $E((X+Y)^2)$ existe

or $(X+Y)^2 = X^2+2XY+Y^2$

$\left(E((X+Y)^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \right)$

Donc $XY = \frac{1}{2}\left[(X+Y)^2 - X^2 - Y^2\right]$

linéarité espérance $\underline{E(XY) \text{ existe}}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

5)c) ii) $\underline{\text{Astuce}}$: $V(\lambda Y + X)$

$= E\left((\lambda Y + X)^2\right) - \left(E(\lambda Y + X)\right)^2$

$= E(\lambda^2 Y^2 + 2\lambda XY + X^2) - \underbrace{\left(\lambda \underbrace{E(Y)}_{=0} + \underbrace{E(X)}_{=0}\right)^2}_{=0}$

$= \lambda^2 E(Y^2) + 2\lambda E(XY) + E(X^2)$

or par défⁿ 1 variance est positive...

$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda^2 E(Y^2) + 2\lambda E(XY) + E(X^2) \geq 0}$

iii) $\underline{\text{idée}}$ $\to$ calcul de Δ :

$\underline{\text{ nul}}$ $\Delta = 4(E(XY))^2 - 4E(Y^2)E(X^2) \leq 0$

car trinôme de signe constant

Mé 2 étude de fonction

$$h : \lambda \mapsto \lambda^2 E(Y^2) + \dots$$

λ	$-\infty$	$-\frac{E(XY)}{E(Y^2)}$	$+\infty$
$h'(\lambda)$	$-$	|	$+$
h	$\searrow$	≥ 0	$\nearrow$

$$h\left(-\frac{E(XY)}{E(Y^2)}\right) = \frac{(E(Y^2))^2 - (E(XY))^2}{E(Y^2)} \geq 0$$

or $(E(Y^2))^2 = E(Y^2)E(Y^2) = E(X^2)E(Y^2)$

iv) $0 \leq E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

$0 \leq E(XY)^2 \leq E(X^2)^2$

Rappel : $0 \leq x^2 \leq a$ $\quad a \geq 0$

$\iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$

$$-\frac{E(X^2)}{\sigma^2} \leq \frac{E(XY)}{\sigma^2} \leq \frac{E(X^2)}{\sigma^2}$$

$V(X) = \boxed{\sigma^2 = E(X^2)} - \underbrace{(E(X))^2}_{=0}$

$-1 \leq \frac{E(XY)}{\sigma^2} \leq 1$ ie $\boxed{\rho \in [-1,1]}$

v) X et Y indép donc $E(XY) = \underbrace{E(X)}_{0}\underbrace{E(Y)}_{0} \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$

8)a) (Br : $X(\Omega) = \{x_1, x_2\}$

$p_1 = p(X = x_1) > 0$
$p_2 = p(X = x_2) > 0$

or $p_1 + p_2 = 1$
$\Rightarrow p_1 = 1 - \underbrace{p_2}_{>0} < 1$

$p_2 = 1 - \underbrace{p_1}_{>0} < 1$

ma : $\forall i \in [\![1, N]\!]$ $p_i > 0$

or $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$ donc :

$\forall i \in [\![1, N]\!]$ $p_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} p_k = 1$

$$p_i = 1 - \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} p_k}_{>0} < 1$$

8)b) on veut mq pour tte f° φ convexe sur $\mathbb{R}^+$,

si $X(\Omega) = A \subset \mathbb{R}_+$ avec $A = \{\underbrace{x_1}_{\in \mathbb{R}^+}, \underbrace{x_2}_{\in \mathbb{R}^+}\}$

alors on a $\underbrace{E(\varphi(X))}$ $\geq \varphi(E(X))$

(Rappel : $E(\varphi(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} \varphi(k) \, p(X=k)$)

$E(\varphi(X)) = \varphi(x_1) \, p(X = x_1) + \varphi(x_2) \, p(X = x_2)$

$\varphi(E(X)) = \varphi(x_1 \, p(X = x_1) + x_2 \, p(X = x_2))$

$E(\varphi(X)) = p_1 \, \varphi(x_1) + p_2 \, \varphi(x_2)$

$\varphi(E(X)) = \varphi(p_1 x_1 + p_2 x_2)$

Rappel : φ convexe sur I ssi
$\forall (x_1, x_2) \in I^2 \quad \forall (p_1, p_2) \in [0,1]^2 / \; p_1 + p_2 = 1,$

$$\varphi(p_1 x_1 + p_2 x_2) \leq p_1 \varphi(x_1) + p_2 \varphi(x_2)$$

$\rightarrow$ ok cf cours !

c) i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} p_i' = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{1-p_N} p_i = \frac{1}{1-p_N} \sum_{i=1}^{N-1} p_i$

$$= \frac{1}{1-p_N}\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i}_{1} - p_N\Big]$$

$$= \frac{1}{1-p_N}\left[1 - p_N\right] = 1$$

ii) Soit φ fonct° convexe

$P(N-1)$ vraie donc $\underbrace{E(\varphi(Y))}_{} \geq \varphi(E(Y))$

$$\sum_{i=1}^{N-1} p_i' \varphi(x_i) \geq \varphi\Big(\sum_{i=1}^{N-1} p_i' x_i\Big)$$

iii) on veut mq $\underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i \varphi(x_i)}_{} \geq \varphi\left(\sum_{i=1}^{N} x_i p_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} p_i \varphi(x_i) + p_N \varphi(x_N)$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} (1-p_N) p_i' \varphi(x_i) + p_N \varphi(x_N)$$

$$= (1-p_N) \sum_{i=1}^{N-1} p_i' \varphi(x_i) + p_N \varphi(x_N)$$

$$= (1-p_N)\, \varphi\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} p_i' x_i}_{y_N}\Big) + p_N \varphi(x_N)$$

(φ convexe sur $\mathbb{R}$ ssi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\forall \lambda \in [0,1]$ $\varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$)

$$= p_N \varphi(x_N) + (1-p_N) \varphi(y_N)$$ or φ convexe

$$\geq \varphi(p_N x_N + (1-p_N) y_N)$$

$$\geq \varphi\left(p_N(x_N) + (1-p_N) \sum_{i=1}^{N-1} p_i' x_i\right)$$

$$\geq \varphi\left(p_N x_N + \sum_{i=1}^{N-1} p_i x_i\right)$$

$$\geq \varphi\left(\sum_{i=1}^{N} p_i x_i\right) = \varphi(E(X))$$

d) $\psi = -\varphi$ convexe

10) a) $[X=Y] = (X=0)\cap(Y=0)$

$\cup\ (X=1)\cap(Y=1)$

$\vdots$

$\cup\ (X=n)\cap(Y=n)$

$$= \bigcup_{k=0}^{n} (X=k)\cap(Y=k)$$

$$\Rightarrow\ p(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} p(X=k)\underbrace{p(Y=k)}_{p(X=k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p(X=k)^2$$