(ex 1)

Partie A

1) a) soit $t \in [0,+\infty[$ $\quad 0 \leq F_U(t) \leq 1$ car F_U fonction de répartition

$f_V(t) \geq 0$ car f_V fonction de densité

D'où $\quad 0 \cdot f_V(t) \leq F_U(t) f_V(t) \leq 1 \cdot f_V(t)$

soit $\quad \underline{0 \leq F_U(t) f_V(t) \leq f_V(t)}$

b) la fonction $[0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$t \mapsto F_U(t) f_V(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues et positive d'après 1.a.

On sait que $\int_0^{+\infty} f_V(t)\,dt$ converge et vaut 1 (f_V nulle sur $]-\infty,0[$)

L'intégrale $\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\,dt$ est impropre en $+\infty$

on $\forall t \in [0,+\infty[\quad 0 \leq F_U(t) f_V(t) \leq f_V(t)$

Donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives $\underline{\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\,dt \text{ converge}}$

2) $P(U>V) = 1 - P(U \leq V) = 1 - \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\,dt$

or $\int_0^{+\infty} f_V(t)\,dt = 1$ (cf 1.b)

donc $P(U>V) = \int_0^{+\infty} f_V(t)\,dt - \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\,dt$

par linéarité des intégrales convergentes

$$\underline{P(U>V) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t)) f_V(t)\,dt}$$

3) a) $F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad f_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \mu e^{-\mu t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

b) soit $t \in [0,+\infty[\quad (1-F_U(t)) f_V(t) = \mu e^{-(\mu+\lambda)t}$

soit $A>0 \quad \int_0^A (1-F_U(t)) f_V(t)\,dt = \mu \int_0^A e^{-(\mu+\lambda)t}\,dt$

$$= \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)A}\right)$$

on $\lim_{A \to +\infty} e^{-(\mu+\lambda)A} = 0$ d'où $\underline{\int_0^{+\infty} (1-F_U(t)) f_V(t)\,dt = \frac{\mu}{\mu+\lambda}}$

Partie B

4 a) soit $t \in \mathbb{R}^+$ $\quad [\Pi_n > t] = \bigcap_{i=1}^{n} (T_i > t)$

Par indépendance des $(T_i)_{i \in [1,n]}$ $\quad P([\Pi_n > t]) = \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t)$

comme les T_i ont même loi que T_1

$$\underline{P([\Pi_n > t])} = P(T_1 > t)^n = (e^{-\lambda t})^n = \underline{e^{-n\lambda t}}$$

b) si $t \in]0, +\infty[$ $\quad P(\Pi_n \leq t) = 0$

si $t \in [0, +\infty[$ $\quad P(\Pi_n \leq t) = 1 - P(\Pi_n > t) = 1 - e^{-n\lambda t}$

d'où

$$\underline{F_{\Pi_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$$

donc $\underline{\Pi_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda n)}$

5 a) $(N = 1) = (T_1 \leq T_0)$ car 1 est le plus petit entier k tel que $T_k \leq T_0$

En reprenant le résultat de la question A, 3, b on a :

$$P(T_1 > T_0) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda} = \frac{1}{2}$$

d'où $\underline{P(T_1 \leq T_0) = \frac{1}{2}}$

b) soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'événement $[N > n]$ signifie que pour tout i appartenant à $[1, n]$ on a $T_i > T_0$ donc $\min_{i \in [1,n]} (T_i) > T_0$ (car nombre fini de val) d'où $\underline{[N > n] = [\Pi_n > T_0]}$

$$P([N > n]) = P([\Pi_n > T_0]) = \frac{n\lambda}{n\lambda + \lambda} = \frac{n}{n+1} \quad \text{(on utilise A 3.b)}$$

donc $\underline{P([N > n]) = \frac{n}{n+1}}$

c) soit $n \in \mathbb{N}^* / \{1\}$ $\quad [N > n-1] = [N > n] \cup [N = n]$

Par incompatibilité des événements $[N > n]$ et $[N = n]$

$$P([N = n]) = P([N > n-1]) - P([N > n])$$

$$\underline{P([N = n])} = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n-1) - n^2}{n(n+1)} = \underline{\frac{1}{n(n+1)}}$$

5) $P([N=0]) = 1 - P([N=1]) - \sum_{n=2}^{+\infty} P([N=n])$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*/\{1\}$ $\quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

soit $k \geq 2$ $\quad \sum_{n=2}^{k} P([N=n]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}$ par télescopage

d'où $\quad \sum_{n=2}^{+\infty} P([N=n]) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}$

Donc $\quad \underline{P([N=0]) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0}$

6) N admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\frac{n}{n(n+1)}$ est absolument convergente.

or $\frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc par théorème d'équivalence pour les séries positives, cette série diverge donc <u>N n'admet pas d'espérance</u>.

EM Lyon 2019

Exercice 2

Partie A

1. A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, à savoir $\frac{1}{2}$, 1 et 2.
A n'admet pas 0 pour valeur propre est donc inversible.
A admet trois valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension 3, elle est donc diagonalisable.

2. Recherchons les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1/2, 1 et 2.
- on a $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ d'où $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$
- soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a

$$AX = \frac{1}{2}X \iff \begin{cases} x - y + z = \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y \\ 2z = \frac{1}{2}z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix}2y\\y\\0\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

avec $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ d'où $E_{\frac{1}{2}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

- Pour la valeur propre 2, on a

$$AX = 2X \iff \begin{cases} x - y + z = 2x \\ \frac{1}{2}y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

avec $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ d'où $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Par concaténation des familles libres issues des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, on obtient une famille libre de cardinal 3 de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, à savoir une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vep. Et on a alors, en rangeant les valeurs propres dans l'ordre croissant, $\underline{A = PDP^{-1}}$ avec $\underline{P \text{ matrice de passage inversible}}$

$$P = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

On a $D^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ par inversion d'une matrice diagonale.

3. Calculons Q^2

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

d'où $\underline{Q^2 = I}$

calculons QDQ

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\\frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\\frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

d'où $\underline{QDQ = D^{-1}}$

4. On en déduit, comme $Q^2 = I$ que Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = Q$.
La seconde formule donne ainsi $Q^{-1}DQ = D^{-1}$
ce qui signifie que D et D^{-1} sont semblables.
Or A et D sont semblables, on en déduit que A^{-1} et D^{-1} le sont également.
D'où par transitivité $\underline{A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables}}$.

Partie B

5. On a M matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, (e_1, e_2, e_3)
Calculons
$f(1,0,0) = (1,0,0)$
$f(0,1,0) = (0,0,1)$
$f(0,0,1) = (0,-1,2)$

d'où

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ /e_3 \end{array}$$

M est inversible si et seulement si $\operatorname{rg} M = 3$. Or le rang de M est le rang de la famille constituée par ses vecteurs colonnes. Montrons que cette famille est libre.
Supposons qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
Montrons qu'alors $a = b = c = 0$.
On a $\begin{pmatrix}a\\-c\\b+2c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 0 \\ -c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

d'où la famille considérée est libre, $\operatorname{rg} M = 3$ et <u>M est inversible</u>.

6. a. Montrons que 1 est valeur propre de f et cherchons le sous-espace propre associé.
Pour cela, résolvons l'équation $f(x,y,z) = 1\,(x,y,z)$ avec $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
ie $(x, -z, y+2z) = (x,y,z) \iff \begin{cases} x = x \\ -z = y \\ y + 2z = z \end{cases} \iff z = -y$

Les solutions s'écrivent $(x, y, -y) = x\,(1,0,0) + y\,(0,1,-1) = x\,u_1 + y\,u_2$
avec u_1 et u_2 non nuls et non colinéaires, d'où

<u>1 valeur propre de f</u> et <u>$E_1 = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ de dimension 2</u>

b. Cherchons un vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z) = (x,y,z) + (0,1,-1)$
Ainsi $(x, -z, y+2z) = (x, y+1, z-1) \iff \begin{cases} x = x \\ -z = y+1 \\ y + 2z = z - 1 \end{cases} \iff z = -y-1$

En particulier, <u>le vecteur $u_3 = (0,0,-1)$ convient.</u>

c. Montrons que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. C'est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de dimension 3. Il suffit ainsi de montrer que c'est une famille libre.
Supposons qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3 = 0$. Montrons qu'alors $a = b = c = 0$.
On a $a\,(1,0,0) + b\,(0,1,-1) + c\,(0,0,-1) = (0,0,0)$
ie $(a, b, -b-c) = (0,0,0) \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ -b-c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$

<u>La famille $\mathcal{B}_1$ est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3</u>, c'est donc une <u>base de $\mathbb{R}^3$</u>.

7. a. La matrice M_1 de f dans $\mathcal{B}_1$ s'écrit

$f(u_1) = u_1$
$f(u_2) = u_2$
$f(u_3) = u_2 + u_3$

$$\begin{array}{c} \\ M_1 = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ /u_1 \\ /u_2 \\ /u_3 \end{array}$$

La matrice M_2 de f dans $\mathcal{B}_2$ s'écrit

$f(u_1) = u_1$
$f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ par linéarité
$f(u_3) = u_2 + u_3 = -(-u_2) + u_3$

$$\begin{array}{c} \\ M_2 = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(-u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ /u_1 \\ /-u_2 \\ /u_3 \end{array}$$

b. <u>Les matrices M_1 et M_2 sont les matrices du même endomorphisme f dans deux bases différentes. Elles sont donc semblables.</u>
Calculons $M_1 M_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où <u>$M_1 M_2 = I$</u>

8. On en déduit, comme $M_1 M_2 = I$ que M_1 est inversible d'inverse $M_1^{-1} = M_2$.
Or M_1 et M_2 sont semblables, ce qui signifie que M_1 et M_1^{-1} sont semblables.
Or M et M_1 sont semblables car elles représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes. Etant inversibles, on en déduit que M^{-1} et M_1^{-1} sont également semblables, d'où par transitivité <u>M et M^{-1} sont semblables</u>.

Partie C

9. T est une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls. Elle est donc <u>inversible</u>.
T étant triangulaire admet comme valeurs propres ses éléments diagonaux, à savoir 1. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice identité et serait ainsi la matrice identité, ce qui n'est pas le cas. <u>T n'est donc pas diagonalisable</u>

10. a. On a $N = T - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et l'on a pour N^3

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \underline{N^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$$

On a $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3$
or, comme $N^3 = 0$
et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3$

b. soit $T(I_3 - N + N^2) = I_3$
ce qui confirme que T est inversible d'inverse $\underline{T^{-1} = I_3 - N + N^2}$

11. a. On a vu en 10. a. que $N^2 \neq 0$ et que $N^3 = 0$
soit avec g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N, l'endomorphisme $g \circ g$ est non nul tandis que $g \circ g \circ g = 0$.
On en déduit que : $\underline{\exists u \in \mathbb{R}^3 / \ g \circ g(u) \neq 0 \ \text{et} \ g \circ g \circ g(u) = 0}$

b. La famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que c'est une famille libre.
Supposons qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a\, g \circ g(u) + b\, g(u) + c u = 0$. Montrons qu'alors $a = b = c = 0$.
On a $a\, g \circ g(u) + b g(u) + c u = 0$.
En appliquant g à cette expression, on obtient par linéarité

$$g(a\, g \circ g(u) + b\, g(u) + c\, u) = g(0) = 0$$
$$a\, g \circ g \circ g(u) + b\, g \circ g(u) + c\, g(u) = 0$$

ie $$b\, g \circ g(u) + c\, g(u) = 0$$

En appliquant g à cette expression, on obtient de même

$$b\, g \circ g \circ g(u) + c\, g \circ g(u) = 0$$

ie $$c\, g \circ g(u) = 0$$

Or $g \circ g(u) \neq 0$ d'où $c = 0$.
L'expression précédente conduit à $b\, g \circ g(u) = 0$
Or $g \circ g(u) \neq 0$ d'où $b = 0$.
Enfin, la première expression conduit à $a\, g \circ g(u) = 0$
Or $g \circ g(u) \neq 0$ d'où $a = 0$.
<u>La famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$</u> est donc une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de dimension 3, ie <u>une base de $\mathbb{R}^3$</u>.

c. La matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$ s'écrit

$$g(g \circ g(u)) = g \circ g \circ g(u) = 0$$
$$g(g(u)) = g \circ g(u)$$
$$g(u) = g(u)$$

soit
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_3}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(g\circ g(u)) & g(g(u)) & g(u) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} / g \circ g(u) \\ / g(u) \\ / u \end{array}$$

d. Calculons $N^2 - N$.
On a $N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On reconnaît la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.
<u>Les matrices N et $N^2 - N$ représentant le même endomorphisme g dans deux bases différentes sont donc <u>semblables</u>.</u>

12. Or on a $N = T - I$ et $N^2 - N = T^{-1} - I$. D'où $T - I$ et $T^{-1} - I$ sont semblables

ie il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$T^{-1} - I = P^{-1}(T - I)P$$

ie $$T^{-1} - I = P^{-1}TP - P^{-1}IP$$

soit $$T^{-1} - I = P^{-1}TP - I$$

ie $$T^{-1} = P^{-1}TP$$

ce qui signifie que <u>T et T^{-1} sont semblables.</u>

ex 3 — **Partie A**

1) f est définie sur $]0,+\infty[$ et C^∞ sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions C^∞

$$\forall t \in]0,+\infty[\quad \begin{cases} f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{t^2-1}{t^2} \\ f''(t) = \dfrac{2}{t^3} \end{cases} \qquad \forall t>0 \ f''(t)>0 \quad \underline{f \text{ est convexe}}.$$

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$$

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2) f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ car $\forall t>1 \ f'(t)>0$ et f' ne s'annule qu'en 1. Donc $\underline{f \text{ réalise une bijection de } [1,+\infty[}$ à valeurs dans $[f(1), \lim_{t\to+\infty} f(t)[$ c'est à dire $\underline{[2,+\infty[}$

3 a) g est strictement croissante de $[2,+\infty[$ à valeurs dans $[1,+\infty[$ par propriété d'une réciproque.

b) par propriété de la réciproque d'une fonction dérivable (f est C^1), g est dérivable en tous points où f' ne s'annule pas. Or f' ne s'annule qu'en 1 donc $\underline{g \text{ dérivable sur }]2,+\infty[}$

c) soit $y \in]2,+\infty[$, $\exists!\, t \in]1,+\infty[$ tel que $f(t) = y$ (et $t = g(y)$)

$$\begin{cases} y = t + \dfrac{1}{t} \\ t \in]1,+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} t^2 - ty + 1 = 0 \\ t \in]1,+\infty[\end{cases} \quad \text{car } t>0$$

On résoud l'équation du second degré $t^2 - ty + 1 = 0$

$$\Delta = y^2 - 4 \qquad \Delta > 0 \text{ car } y > 2$$

2 racines possibles : $t_1 = \dfrac{y - \sqrt{y^2-4}}{2}$ ou $t_2 = \dfrac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$

Mais on doit avoir $t>1$ ce que ne vérifie pas t_1

En effet $t_1 = \dfrac{(y-\sqrt{y^2-4})(y+\sqrt{y^2+4})}{2(y+\sqrt{y^2-4})} = \dfrac{2}{y+\sqrt{y^2-4}}$ donc $t_1 < 1$ car $y>2$

D'où $\quad t = g(y) = \dfrac{y + \sqrt{y^2-4}}{2}$

Partie B

4) h étant C^2 sur l'ouvert, on peut calculer les dérivées partielles

Soient $(x,y) \in U$ $\quad \partial_1 h(x,y) = (1+y)\left((1+x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = (1+y)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}\right)$

par symétrie $\quad \partial_2 h(x,y) = (1+x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\right)$

5) (x,y) point critique $\iff \begin{cases} \partial_1 h(x,y) = 0 \\ \partial_2 h(x,y) = 0 \end{cases}$

(x,y) point critique $\iff \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{y^2} \end{cases}$ car $1 + x = 0$ n'a pas de solution sur $]0,+\infty[$ idem pour $1 + y = 0$

(x,y) point critique $\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$

6) (x,y) point critique $\iff \begin{cases} x > 0 \text{ et } y > 0 \\ y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \iff x = y = 1$

car $x = x^4$ n'admet que 1 comme solution strictement positive.

h n'admet que $(1,1)$ comme point critique.

7) (a) soit $(x,y) \in U$ $\quad f(x) + f(y) = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$

d'où $\quad 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2 + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$h(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x + y + xy) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{y}{x} + y + \frac{1}{y} + 1 + \frac{x}{y} + x$

d'où $\quad h(x,y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{y}{x}\right)$

b) . On a $\quad h(1,1) = 8$

. on sait que $\forall t > 0 \quad f(t) \geqslant 2 \quad$ d'où $\forall (x,y) \in U \quad 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{y}{x}\right) \geqslant 8$

Donc $\forall (x,y) \in U \quad h(1,1) \leqslant h(x,y)$ on a bien un minimum global sur U

Partie C : (8) On démontre par récurrence la propriété :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: " u_n existe et $u_n \geq 1$ "

Initialisation : u_1 existe et $u_1 \geq 1$

Hérédité : supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $P(n)$ soit vraie.

alors $\frac{1}{n^2 u_n}$ est défini car $u_n > 0$ donc u_{n+1} existe.

de plus $u_n + \frac{1}{n^2 u_n} \geq u_n$ car $n^2 u_n > 0$

d'où $u_{n+1} \geq u_n \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq 1$

donc $P(n+1)$ vraie

Conclusion : par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ u_n existe et $u_n \geq 1$

(9) fonction

```
u = suite(n)
u = 1
for k = 2 : n
u = u + 1/(n^2 * u)
end
endfonction.
```

(10) a) soit $n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = \frac{1}{n^2 u_n}$ et $\frac{1}{n^2 u_n} \leq \frac{1}{n^2}$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \geq 1$ donc $\frac{1}{u_n} \leq 1$ et $n^2 u_n > 0$

d'où $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$

b) la série de terme général v_n est positive et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n \leq \frac{1}{n^2}$

Or la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

c) soit $n \geq 2$ $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_1 = u_n - 1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = u_n - 1$$

La série $\sum_{k\geq 1} v_k$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$

or $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$ donc $\underline{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$ comme somme d'une constante et d'une suite convergente. et $\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k}$

11) a) soit $k \geq 2$ $\forall t \in [k-1, k]$ $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{k^2}$ par décroissance de la fonction $[k-1, k] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$

on peut intégrer cette inégalité entre $k-1$ et k et les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant on a $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^2}$

d'où $\underline{\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}}$

b) $\sum_{k=p}^{n-1} v_k = \sum_{k=p}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_p$

on sait que la série de terme général v_k est à termes positifs

donc $\sum_{k=p}^{n-1} v_k \geq 0$ d'où $\underline{u_n - u_p \geq 0}$

D'autre part $\sum_{k=p}^{n-1} v_k \underset{(10.a)}{\leq} \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k^2} \underset{(11.a)}{\leq} \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$

or par Chasles $\sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = \int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2}$

d'où $\sum_{k=p}^{n-1} v_k \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2}$

donc $\underline{0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2}}$

c) $0 \leq u_n - u_2 \leq \int_1^{n-1} \frac{dt}{t^2}$ en appliquant 11.b à $p=2$

d'où $u_2 \leq u_n \leq u_2 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{n-1}$

soit $u_2 \leq u_n \leq u_2 + 1 - \frac{1}{n-1} \leqslant u_2 + 1$ car $-\frac{1}{n-1} \leq 0$

d'où $\underline{u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2}$

$u_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$ donc $\forall n \geqslant 2 \quad 2 \leq u_n \leq 3$

le passage à la limite conservant les inégalités $\underline{2 \leq \ell \leq 3}$

d) $\forall p \geq 2, \ \forall n \geqslant p \qquad 0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2}$

on $\int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$

d'où $\int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{p-1}$

donc $\forall n \geqslant p \qquad 0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1}$

par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ $\underline{0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}}$.

e) Cherchons p tel que $\frac{1}{p-1}$ soit "égal" à 10^{-4}

on prend $p = 10^4 + 1$

alors pour cette valeur de p on aura $0 \leq \ell - u_p \leq 10^{-4}$

il suffit donc de calculer ensuite $\underline{\text{suite}(10\wedge 4 + 1)}$

en utilisant la fonction suite de 9