Corrigé Rapide Ecricome

Exercice 1

A

1 a) $A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

1 b) Le polynôme X^3 est annulateur de A car $A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$
Sa seule racine est 0 donc $Sp(A) \subset \{0\}$

1 c) Soit $u \in \mathbb{R}^3$ et $X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de u dans (e_1, e_2, e_3)

On a $(S) : f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff (S) : AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(S) : \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ $\quad$ (2) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $\quad$ (1) $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$(S) : \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

$(S) : \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

d'où $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left((-1,-1,1)\right)$

le vecteur $(-1,-1,1)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

1 d) 0 est donc valeur propre. $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ donc $\dim \operatorname{Ker} f \neq \dim \mathbb{R}^3$ donc f non diagonalisable.

2 a) $\operatorname{card}(e'_1, e'_2, e'_3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, pour montrer que cette famille est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(S) : \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$(S) : \iff \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $\quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$(S) : \iff \begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

La famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre. C'est une base.

(b) On calcule les images de (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base canonique. ②

- $f(e'_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$ car on a vu que $\ker f = \mathrm{Vect}(e'_1)$
- $A\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ d'où $f(e'_2) = e'_1$
- $A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ d'où $f(e'_3) = e'_2$

donc
$$T : \begin{array}{ccc|c} f(e'_1) & f(e'_2) & f(e'_3) & \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{c} \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow e'_1 \\ \leftarrow e'_2 \\ \leftarrow e'_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(e'_1) & f(e'_2) & f(e'_3) \end{array} & \end{array}$$

3) (a) $\underline{M} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + I = \underline{-A + I}$

(b)
$$M' : \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow e'_1 \\ \leftarrow e'_2 \\ \leftarrow e'_3 \end{array} \end{array}$$

$\underline{-f(e'_1)+e'_1 \quad -f(e'_2)+e'_2 \quad -f(e'_3)+e'_3}$

(c) M' est triangulaire supérieure et les termes de la diagonale sont non nuls donc M' inversible, M' représente la matrice d'un certain endomorphisme g dans B'. M représente la matrice du même endomorphisme dans B donc $\underline{M \text{ inversible.}}$

(d) M et I commutent. On a, d'une part $(M-I)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I$ et d'autre part $(M-I)^3 = (-A)^3 = -A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

D'où $M^3 - 3M^2 + 3M = I$ donc $M(M^2 - 3M + 3I) = I$

d'où $\underline{M^{-1} = M^2 - 3M + 3I = A^2 + A + I}$

(e) A et I commutent donc $\forall n \geq 1$ $M^n = (-A+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^k$

$$\underline{M^n = I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2}$$

si $n=-1$, on constate que le membre de droite de l'égalité vaut $I + A + A^2$ c'est à dire Π^{-1}

l'expression reste donc vraie pour $n=-1$

B 1) $V^2 = T$ $\quad VT = V.V^2 = V^3 = V^2V = TV$ d'où $VT = TV$

VT est la matrice de $g\circ f$ dans B'
TV est la matrice de $f\circ g$ dans B' d'où $g\circ f = f\circ g$

2) a) On calcule $f(g(e'_1))$. Comme $g\circ f = f\circ g$, on a

$$f(g(e'_1)) = g(f(e'_1)) = g(0) = 0$$ donc $g(e'_1) \in \ker f$

Or $\ker f = \mathrm{Vect}(e'_1)$ d'où $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $g(e'_1) = a e'_1$

b) $$f(g(e'_2) - a e'_2) = f(g(e'_2)) - a f(e'_2)$$
$$= g(f(e'_2)) - a e'_1$$
$$= g(e'_1) - a e'_1$$
$$= a e'_1 - a e'_1 = 0$$

d'où $g(e'_2) - a e'_2 \in \ker f$

$\ker f = \mathrm{Vect}(e'_1)$ donc $\exists b \in \mathbb{R}$, $g(e'_2) - a e'_2 = b e'_1$

donc $g(e'_2) = a e'_2 + b e'_1$

c) $$f(g(e'_3)) = g(f(e'_3)) = g(e'_2) = a e'_2 + b e'_1$$

donc en réitérant le processus vu en b on montre que $g(e'_3) - a e'_3 - b e'_2 \in \ker f$

car $$f(g(e'_3) - a e'_3 - b e'_2) = f(g(e'_3)) - a f(e'_3) - b f(e'_2)$$
$$= a e'_2 + b e'_1 - a e'_2 - b e'_1 = 0$$

d) $\ker f = \mathrm{Vect}(e'_1)$ donc $\exists c \in \mathbb{R}$ $g(e'_3) - a e'_3 - b e'_2 = c e'_1$

d'où

$$V : \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow e'_1 \\ \leftarrow e'_2 \\ \leftarrow e'_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ g(e'_1) & g(e'_2) & g(e'_3) \end{array} & \end{array}$$

3) $V^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$

si $V^2 = T$ alors nécessairement $a = 0$ et donc $ab = 0$
et on n'a pas $ab = 1$ donc contradiction.

Exercice 2 (A) 1) les lignes de niveau semblent toutes prendre des valeurs supérieures à 3. et cette valeur semble atteinte au point $(1,1)$.
On conjecture que f présente un minimum global en $(1,1)$

2) a) soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$U \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto \frac{x}{y^2}$ est C^2 en tant que quotient de fonctions C^2 dont le dénominateur ne s'annule pas sur U
$(x,y) \mapsto y^2$ est C^2 car polynomiale.
$(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ est C^2 (quotient ...)

donc f est C^2 sur U

b) $\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \\ \partial_2 f(x,y) = -\frac{2x}{y^3} + 2y \end{cases}$

Soit $\Pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$ Π point critique si et slt si

$(S) : \begin{cases} \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \\ \frac{x}{y^3} = y \end{cases} \iff (S) : \begin{cases} x = y \\ y^4 = y \end{cases}$ car $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$\iff (S) : \begin{cases} x = y \\ y^3 = 1 \end{cases}$ et $(x,y) \in U$

$\iff (S) : x = y = 1$

donc f n'admet qu'un seul point critique $\Pi : (1,1)$

5

c) $\partial^2_{11} f(x,y) = \frac{2}{x^3}$ $\quad \partial^2_{22} f(x,y) = -\frac{6}{y^4} + 2$

comme f est C^2 on applique le théorème de Schwarz

$$\partial^2_{12} f(x,y) = \partial^2_{21} f(x,y) = -\frac{2}{y^3}$$

Au point critique $\quad \nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

d) On cherche les valeurs propres de la hessienne

λ valeur propre $\iff \det(\nabla^2 f(1,1) - \lambda I) = 0$

$$\iff (2-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0$$

$$\iff 12 - 10\lambda + \lambda^2 = 0$$

la somme des racines vaut 10 $\quad (\lambda^2 - \Sigma\lambda + P)$
le produit des racines vaut 12

donc les 2 racines sont strictement positives

f présente un minimum local en $(1,1)$

B 1) soit $n \geq 1$ h_n est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et C^∞ par théorèmes d'opérations

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad h_n'(x) = n x^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} = \frac{n}{x^{n+1}}(x^{2n} - 1)$

si $x \in]0,1[$ $\quad x^{2n} - 1 < 0$

si $x \in]1,+\infty[$ $\quad x^{2n} - 1 > 0$ $\quad$ et $\quad 1^{2n} - 1 = 0$

donc h_n strictement décroissante sur $]0,1[$ et st croissante sur $[1,+\infty[$

2) h_n continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, elle réalise donc une bijection de $]0,1[$ dans $]h_n(1), \lim_{x\to 0} h_n(x)[$

or $h_n(1) = 3$ et $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = +\infty$

or $4 \in]3,+\infty[$ donc $\exists!\, u_n \in]0,1[$ tel que $h(u_n) = 4$

m̂ raisonnement pour v_n et comme $h_n(1) < 4$ on a bien $v_n > 1$

3 a) $h_{n+1}(x) - h_n(x) = x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - 1 - \frac{1}{x^n}$

$= (x-1)\,x^n + \frac{1}{x^{n+1}}(1-x)$

$= \frac{(x-1)}{x^{n+1}}\left(x^{2n+1} - 1\right)$

b) $h_n(v_n) = 4$ donc $h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = h_{n+1}(v_n) - 4$

$= \frac{(v_n - 1)}{v_n^{n+1}}\left(v_n^{2n+1} - 1\right)$

or $v_n - 1 > 0$

$v_n^{2n+1} - 1 > 0$ car $v_n > 1$

d'où $h_{n+1}(v_n) - 4 \geq 0$

c) On a $h_{n+1}(v_n) \geq 4$ et $h_{n+1}(v_{n+1}) = 4$

donc $h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$

et comme h_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

alors $v_n \geq v_{n+1}$ d'où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

4 a) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par 1 donc convergente (Théorème de la limite monotone)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n > 1$ donc par passage à la limite $\ell \geq 1$

b) si $\ell > 1$ comme (v_n) est décroissante, on aurait

$\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n \geq \ell$ donc $v_n^n \geq \ell^n$

or $\lim_{n\to+\infty} \ell^n = +\infty$ donc par encadrement $\lim_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$

On $h_n(v_n) = 4 = 1 + v_n^n + \frac{1}{v_n^n}$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + v_n^n + \frac{1}{v_n^n} = +\infty$

or $\forall n \in \mathbb{N}$ $h_n(v_n) = 4$ on a donc une contradiction

c) On sait que $\ell \geq 1$ et $\ell \leq 1$ car $\ell > 1$ aboutit à une contradiction. Donc $\ell = 1$

5 ⓐ v_1 est solution de $4 = 1 + v_1 + \frac{1}{v_1}$

soit $v_1^2 - 3v_1 + 1 = 0$ qui admet pour racines $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

or $2 < \sqrt{5} < 3$ car $4 < 5 < 9$

donc $\frac{5}{2} < x_1 < 3$ et $0 < x_2 < \frac{1}{2}$

donc $v_1 = x_1$ et $v_1 \leq 3$

Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n \leq 3$

ⓑ fonction $y = h(n, x)$

$y = 1 + x\hat{}n + 1/(x\hat{}n)$

endfonction

ⓒ if $h(n, c) < 4$ then $a = c$

else $b = c$

end

disp c

ⓓ que la suite $(v_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante

ⓔ . Si $n = 1$, on a vu que $v_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = v_1^1$

si $n \geq 1$ v_n vérifie que $4 = 1 + v_n^n + \frac{1}{v_n^n}$ pas de récurrence !

posons $X = v_n^n$ on a donc $X^2 + 1 - 3X = 0$

donc $X = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $X = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ mais $v_n > 1$ donc $v_n^n > 1$

donc $X > 1$ d'où $X = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

et donc $v_n^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

on a alors $\dfrac{1}{v_n^n} = \dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$

. La suite $(v_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante.

f) On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

or $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

par continuité de exp, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} = 1$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$

exercice 3 Ⓐ 1) $\mathbb{R}$ symétrique / 0

- si $x \in]-1,1[$, $-x \in]-1,1[$ et $f(-x) = 0 = f(x)$
- si $x \in [1,+\infty[$ $\quad -x \in]-\infty,-1]$ et $f(-x) = -\dfrac{1}{(-x)^3} = -\dfrac{1}{-x^3} = \dfrac{1}{x^3}$

idem si $x \in]-\infty,-1]$ $\qquad = f(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(-x)$, f est paire.

2) La fonction $\begin{array}{l}[1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t^3}\end{array}$ est continue et l'intégrale est impropre en $+\infty$

soit $A>0$ $\displaystyle\int_1^A \frac{dt}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2}$

or $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2A^2} = \dfrac{1}{2}$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$

3 ⓐ soit $A > 1$ considérons le changement de variable affine donc C^1 bijectif $t = -u$

$$\int_1^A f(u)\,du = \int_{-1}^{-A} f(-t)(-dt) = -\int_{-1}^{-A} f(t)\,dt = \int_{-A}^{-1} f(t)\,dt$$

car f est paire

· donc $\lim_{(-A)\to-\infty} \int_{-A}^{-1} f(t)\,dt = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(u)\,du = \frac{1}{2}$

donc $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$

ⓑ · la fonction f est positive. En effet, si $x \in]-\infty, -1]$ on a $f(x) = \frac{1}{-x^3}$ et $-x^3 \geq 0$

De même si $x \in]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$

· f est continue par théorème d'opération sauf en 1 et -1

· $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

En effet $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt$ converge, $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1

Donc f est une densité

④ ⓐ 1^e cas : $x \leq -1$ $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lim_{A\to-\infty} \int_A^x f(t)\,dt$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2A^2} = \frac{1}{2x^2}$$

2^e cas : $x \in]-1, 1[$ $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$

car f nulle sur $]-1, 1[$

3e cas : $x \geq 1$ $\quad F_X(x) = \frac{1}{2} + \int_1^x f(t)\,dt$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = 1 - \frac{1}{2x^2}$$

(b) la fonction $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto tf(t) \end{array}$ est impaire

donc si f admet une espérance, alors elle sera nulle.

Par imparité et nullité de $tf(t)$ sur $[0,1[$, X admet une espérance si et seulement si $\int_1^{+\infty} x \cdot \frac{1}{x^3}\,dx$ converge. Ce qui est le cas puisqu'on reconnaît une intégrale de Riemann convergente.

Donc $E(X)$ existe et $E(X) = 0$

(c) la fonction $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^2 f(t) \end{array}$ est paire

donc X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge, c'est à dire si $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ converge. Or cette intégrale de Riemann est divergente

Donc X n'admet pas de moment d'ordre 2, donc pas de variance

5) $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$

a) . soit $y \leq 0$ $\quad F_Y(y) = 0$

. soit $y \geq 0$ $\quad F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y)$

$$F_Y(y) = P(-y \leq X \leq y)$$

$$F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y)$$

. si $y \in [0,1[$ $\quad F_Y(y) = 0$

. si $y \in [1,+\infty[$ $\quad F_Y(y) = 1 - \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2y^2} = 1 - \frac{1}{y^2}$

$$F_Y : \begin{cases} 0 \text{ si } y < 1 \\ 1 - \frac{1}{y^2} \text{ si } y \geq 1 \end{cases}$$

F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ car constante sur $]-\infty, 1[$, par théorèmes d'opération sur $[1, +\infty[$

et $\lim_{y \to 1^-} F_Y(y) = 0 = F_Y(1)$ donc F_Y continue en 1

F_Y est C^1 sauf éventuellement en 1

Donc F_Y est la fonction de répartition d'une va à densité dont une densité est donnée en tous points y où F_Y est C^1 par $f_Y(y) = F_Y'(y)$ et la valeur arbitraire 2 au point 1

D'où b) $f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

c) Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x . f_Y(x)\, dx$ est absolument convergente, soit si $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx$ converge, ce qui est le cas (intégrale de Riemann)

$E(Y)$ existe et $E(Y) = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{2}{x^2}\, dx = \lim_{A \to +\infty} 2 - \frac{2}{A}$

$= 2$

donc $E(Y) = 2$

Partie B

1) a) $Z(\Omega) = \{0, 1\}$ donc $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$

d'où $E(Z) = \frac{1}{2} = E\left(\frac{D+1}{2}\right) = \frac{1}{2} E(D) + \frac{1}{2}$ d'où $E(D) = 0$

par linéarité

$V(Z) = \frac{1}{4} = V\left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} V(D)$ d'où $V(D) = 1$

(b) D et Y étant indépendantes et admettant chacune une espérance T admet une espérance et $E(T) = E(D)\,E(Y) = 0$

(c) Considérons le sce $\{(D=1)\ (D=-1)\}$

$$P(T \le x) = P(DY \le x) = P(DY \le x) \cap (D=1) + P(DY \le x) \cap (D=-1)$$

Mais $P(DY \le x) \cap (D=1) = P(Y \le x) \cap (D=1)$

$= \frac{1}{2} P(Y \le x)$ par indépendance de Y et D

$$P(DY \le x) \cap (D=-1) = P(-Y \le x) \cap (D=-1)$$
$$= P(Y \ge -x) \cap (D=-1)$$
$$= \frac{1}{2} P(Y \ge -x)$$

d'où $P(T \le x) = \frac{1}{2} P(Y \le x) + \frac{1}{2} P(Y \ge -x)$

(d) $T(\Omega) = \mathbb{R}$

• soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad P(T \le x) = \frac{1}{2} P(Y \le x) + \frac{1}{2}\left(1 - P(Y \le -x)\right)$

$$F_T(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F_Y(x) - \frac{1}{2} F_Y(-x)$$

• si $x < 1$ $\quad F_Y(x) = 0$ et $F_Y(-x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

d'où $F_T(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2}$

• si $x \ge 1$ $\quad F_Y(-x) = 0$ et $F_Y(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

d'où $F_T(x) = 1 - \frac{1}{2x^2}$

$$F_T(x) : \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

2) a) $F_U(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \leq 0 \\ u \text{ si } u \in]0,1[\\ 1 \text{ si } u \geq 1 \end{cases}$

b) $U(\Omega) =]0,1[$ $\quad \sqrt{(1-U)}(\Omega) =]0,1[$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}}\right)(\Omega) =]1,+\infty[$$

donc $V(\Omega) =]1,+\infty[$

. soit $x \leq 1$ $\quad F_V(x) = 0$

. soit $x > 1$ $\quad F_V(x) = P(V \leq x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right)$

$$= P\left(\sqrt{1-U} \geq \frac{1}{x}\right)$$

$$= P\left(1-U \geq \frac{1}{x^2}\right)$$ car $x > 1$ et la fonction carré est croissante

$$= P\left(U \leq 1-\frac{1}{x^2}\right) = F_U\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

or si $x > 1$ on a $1-\frac{1}{x^2} \in]0,1[$

d'où $F_U\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1-\frac{1}{x^2}$

donc
$$F_V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ 1-\frac{1}{x^2} \text{ si } x > 1 \end{cases} = F_Y(x)$$

V et Y ont même support et même fonction de répartition donc elles suivent la même loi

3 (a) fonction $a = D(n)$ (on utilise $D = 2Z-1$)

$a = 2 * \text{rand}(1,n) - 1$

end function

et on simule Z par une binomiale de paramètre $n=1$ ou par rand( )

(b) on simule $T = DY$ et sum(c)/n est une approximation de l'espérance de T