Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt$ existe, I_n est définie

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ $\qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \, dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

d'où $I_2 = \frac{1}{4}\pi + 0 = \frac{\pi}{4}$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\quad 0 \leq \cos t \leq 1$

donc $0 \leq (\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n \leq 1$

Par positivité de l'intégrale : $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt$

d'où $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

$(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et minorée par 0 donc convergente.

b) soit $n \in \mathbb{N}$ On pose $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) . \cos t \, dt$

On pose sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ $\quad u(t) = \cos^{n+1}(t)$ $\quad u$ est C^1

et $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\quad u'(t) = (n+1) \cos^n t (-\sin t)$

$v(t) = \sin t$ $\qquad v'(t) = \cos t$

IPP licite car u et v C^1

$$I_{n+2} = \left[\cos^{n+1}(t) \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t \, dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t (1 - \cos^2 t) \, dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

d'où $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$

c) Récurrences triviales (intégrales de Wallis...)

Toute la 1e vite fait. : , initialisation : $I_{2\cdot 0} = \frac{(2\cdot 0)!}{(2^0 0!)^2}\frac{\pi}{2}$

, hérédité : on suppose $\exists n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$

$$I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = \frac{(2n+1)}{(2n+2)} I_n \quad (\text{en utilisant } 1(b))$$

On retrouve $I_2 = \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n+2)}{(2n+2)}\frac{(2n+1)}{(2n+2)}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n+1))!}{2^2(n+1)^2(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$$

cqfd

(d) étrange algo

```
u = zeros(1, 2n+2)
u(0) = %pi/2
u(1) = 1
~~u(2*n) = ...~~ for k = 1:n
  u(2*k) = (2*k-1)/(2*k) * u(2*k-2)
  u(2*k+1) = (2*k)/(2*k+1) * u(2*(k-1)
end
```

il me semble qu'on ne peut pas démarrer un vecteur Scilab à 0

3 (a) $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ $\qquad \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$

(b) $n \ln\left(\cos\left(n^{-1/4}\right)\right) = n \ln\left(1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) - 1\right)\right)$

on $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos\frac{1}{n^{1/4}} - 1 = 0$

On pose $u = \cos\frac{1}{n^{1/4}} - 1$

on a donc $\ln\left(1 + \cos\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) - 1$

et comme $\cos\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n^{1/4})^2}$

$n \ln\left(\cos n^{-1/4}\right)^{*} \sim -\frac{1}{2}\sqrt{n}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} n \ln\left(\cos n^{-1/4}\right)^{*} = -\infty$ ③

Par continuité de la fonction exp

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\cos n^{-1/4}\right)} = 0$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \left(\cos n^{-1/4}\right)^n = 0$

ⓒ $n\in\mathbb{N}^*$, de la même manière qu'en ⓑ, on montre que

$$\ln\left(\cos n^{-2/3}\right) \underset{+\infty}{\sim} \cos\frac{1}{n^{2/3}} - 1$$

d'où $n\ln\left(\cos n^{-2/3}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n^{4/3}}$

soit $n\ln\left(\cos n^{-2/3}\right) \sim -\frac{1}{2n^{1/3}}$

$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2n^{1/3}} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\cos(n)^{-2/3}\right) = 0$

d'où par continuité de exp, $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos n^{-2/3}\right)^n = 1$

4° ⓐ $\forall t\in[0, n^{-1/4}]$ $\quad \cos t \leq 1$ car $n^{-1/4}\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

donc $(\cos t)^n \leq 1$

et par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant, on a

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n\,dt \leq \int_0^{n^{-1/4}} dt = n^{-1/4}$$

ⓑ cos est décroissante sur $\left[n^{-1/4}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\forall t\in\left[n^{-1/4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$(\cos t)^n \leq \left(\cos n^{-1/4}\right)^n$ et par pci

$$\int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,dt \leq \left(\cos n^{-1/4}\right)^n \int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} dt$$

D'où $\displaystyle\int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt \le \left(\cos n^{-1/4}\right)^n \left(\frac{\pi}{2} - n^{-1/4}\right) \le \frac{\pi}{2}\left(\cos n^{-1/4}\right)^n$

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt$ donc $I_n \le n^{-1/4} + \dfrac{\pi}{2}\left(\cos n^{-1/4}\right)^n$

et $I_n \geq 0$. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^{-1/4} = 0$

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\cos n^{-1/4}\right)^n = 0$

d'où par encadrement $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

5 (a) $\forall t \in [0, n^{-2/3}]$ $\cos t \geq \cos n^{-2/3}$ car cos décroissante sur cet intervalle

donc $(\cos t)^n \geq \left(\cos n^{-2/3}\right)^n$

et par pci $\displaystyle\int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n \, dt \geq n^{-2/3}\left(\cos n^{-2/3}\right)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n \geq \displaystyle\int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n \, dt$ car cos est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

d'où $I_n \geq n^{-2/3}\left(\cos n^{-2/3}\right)^n$

on $\left(\cos n^{-2/3}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} 1$

donc $n^{-2/3}\left(\cos n^{-2/3}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2/3}}$

La série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2/3}}$ diverge (Riemann)

donc par TCSTP $\displaystyle\sum_{n \geq 0} I_n$ diverge.

(b) à reprendre

```
n = input('n')
e = floor(n/2)      (test parité)
if  e == n/2  then  S = sum(I(e-1))
    else      S = sum(I(e-1)) + (2^e . fact(e))/fact(2e+1)
end
disp(S)
```

6 ⓐ soit $t \in]-\pi, \pi[$ $\quad \frac{t}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\tan \frac{t}{2}$ est définie

$$\cos t = \cos 2 \cdot \frac{t}{2} = 2\cos^2 \frac{t}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 \frac{t}{2}} - 1$$

car $\quad 1 + \tan^2 \frac{t}{2} = 1 + \frac{\sin^2 t/2}{\cos^2 t/2}$

$$= \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}}$$

d'où $\quad \cos t + 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}$

ⓑ $\tan \frac{t}{2}$ est strictement croissante sur $[0, \pi[$ (composée de 2 fonctions croissantes) et C^1 le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ est licite $\quad du = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{t}{2}\right) dt \quad$ d'où $\frac{dt}{1+\cos(t)} = du$

d'où $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos t} dt = \int_0^1 du = 1$

ⓒ $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^k \cos^k t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-\cos t)^k dt$

or $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad -\cos t \neq 1$

d'où $\quad \sum_{k=0}^{n} (-\cos t)^k = \frac{1 - (-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t}$

d'où $\quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos t} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1+\cos t} dt$

ⓓ $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad 1 \leq 1 + \cos t \leq 2 \quad$ d'où $\frac{1}{1+\cos t} \leq 1$

donc $0 \leq \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1+\cos t} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos t)^{n+1}}{1+\cos t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} = I_{n+1}$

positivité cos $\qquad$ pcq

d'où

ⓔ $\lim_{n \to +\infty} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1+\cos t} dt \right| = 0$

donc $\quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos t} = 1$

ex 2 **A** 1) $S^2 = I$ $\quad Sp(S) \subset \{-1, 1\}$

Mais S symétrique donc diagonalisable. $S \neq I$ et $S \neq -I$ donc 1 ou -1 ne peuvent pas être valeurs propres uniques d'où $\underline{Sp(S) = \{-1, 1\}}$

2) $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$ d'où $\underline{F = Vect((1,0,1), (0,1,0))}$

$X \in G \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_2 \end{cases}$ d'où $\underline{G = Vect((1,0,-1))}$

comme $(1,0,1)$ et $(0,1,0)$ non colinéaires et non nuls, ils forment une base de F

comme $(1,0,-1)$ non nul, il forme une base de G

$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad S\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $F \subset Ker(S - I)$

$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad G \subset Ker(S + I)$

or S diagonalisable donc $\dim Ker(S - I) + \dim Ker(S+I) = 3$

d'où $\dim Ker(S - I) \leq 2$ et comme $\dim F = 2$

$\underline{F = Ker(S - I)}$ et de même $\underline{G = Ker(S + I)}$

3) évident puisque $Ker(S - I) \oplus Ker(S + I) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

B 4 a) soient $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$

$s_{i,j} = 0$ si $i \neq n+1-j$

donc $s_{j,i} = 0$ car $i \neq n+1-j \Rightarrow j \neq n+1-i$

de même

$s_{i,j} = 1$ si $i = n+1-j$ donc si $j = n+1-i$

et alors $s_{j,i} = 1$

donc S est $\underline{\text{symétrique réelle donc diagonalisable}}$.

$$S : \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} & (0) & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} \\ 1 \ \cdots \ n \end{array}$$

b) soit $[SX]_i$ la ième coordonnée de SX

$$[SX]_i = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}\, x_k = s_{i,n+1-i}\, x_{n+1-i} = x_{n+1-i}$$

d'où $SX = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$

c) $[S^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [S]_{ik}[S]_{kj}$ or $s_{kj} = 0$ si $k \neq n+1-j$

d'où $[S^2]_{ij} = s_{i,n+1-j}$

et • $s_{i,n+1-j} = 0$ si $i \neq n+1-(n+1-j)$ c'est à dire si $i \neq j$

• $s_{i,n+1-j} = 1$ si $i = n+1-(n+1-j)$ c'est à dire si $i = j$

Donc $[S^2]_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ donc $S^2 = I$

5) a) soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ posons $Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_{n+1-1} \\ \vdots \\ x_n + x_{n+1-n} \end{pmatrix}$

$Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - x_{n+1-1} \\ \vdots \\ x_n - x_{n+1-n} \end{pmatrix}$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $[Y]_i = \dfrac{x_i + x_{n+1-i}}{2}$

et $[Z]_i = \dfrac{x_i - x_{n+1-i}}{2}$

On a $X = Y + Z$

D'autre part si $i \in [\![1,n]\!]$ $[Y]_{n+1-i} = \dfrac{x_{n+1-i} + x_{n+1-(n+1-i)}}{2} = [Y]_i$

donc $Y \in F$

et $[Z]_{n+1-i} = \dfrac{x_{n+1-i} - x_{(n+1)-(n+1)+i}}{2} = \frac{1}{2}\left(x_{n+1-i} - x_i\right) = -[Z]_i$

d'où $Z \in G$ et $X = Y + Z$

existence prouvée

Supposons $\exists (Y_1, Z_1)$ et (Y_2, Z_2) tels que $X = \cancel{Y}_1 + Z_1$ et $X = Y_2 + Z_2$

alors $Y_1 + Z_1 = Y_2 + Z_2$ d'où $Y_1 - Y_2 = Z_2 - Z_1$

donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $[Y_1 - Y_2]_i = [Z_2 - Z_1]_i$

Mais $[Y_1 - Y_2]_i = [Y_1 - Y_2]_{n+1-i}$ (linéarité)

$[Z_2 - Z_1]_i = -[Z_2 - Z_1]_{n+1-i} = -[Y_1 - Y_2]_{n+1-i}$

$= [Y_1 - Y_2]_i$

donc $[Y_1 - Y_2]_i = -[Y_1 - Y_2]_i$ donc $[Y_1 - Y_2]_i = 0$

d'où $Y_1 = Y_2$ et de même $Z_1 = Z_2$

unicité prouvée.

(b) Soit $Y \in F$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors $SY = \begin{pmatrix} y_{n+1-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix} = Y$ car $Y \in F$

donc $F \subset \operatorname{Ker}(S - Id)$

Mais si $Y \in \operatorname{Ker}(S - Id)$ $SY = Y$ et $Y \in F$

d'où $F = \operatorname{Ker}(S - Id)$

De même si $Z \in G$ $SZ = \begin{pmatrix} z_{n+1-1} \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1 \\ \vdots \\ -z_n \end{pmatrix}$

d'où $G \subset \operatorname{Ker}(S + Id)$

et par le m̂ raisonnement $G = \operatorname{Ker}(S + Id)$

(c) les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 car $S^2 = I$

or S diagonalisable car symétrique réelle et $S \neq I$ $S \neq -I$ donc 1 et -1 sont valeurs propres.

(6) (a) soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

$[AS]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [S]_{kj} = [A]_{i, n+1-j} = [A]_{n+1-i, j}$

$[SA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [S]_{ik} [A]_{kj} = [A]_{n+1-i, j}$ d'où $AS = SA$

(b) S est inversible car 0 n'est pas valeur propre
donc comme X non nul car vecteur propre de A alors SX non nul

D'autre part $A(SX) = S(AX) = S(\lambda X) = \lambda SX$
donc SX vecteur propre de A associé à λ

(c) $AY = AX + ASX = \lambda X + \lambda SX = \lambda Y$

(d) Soit λ une valeur propre de A, soit X un vecteur propre de A associé
le vecteur $X + SX$ appartient à $E_\lambda(A)$
Mais, de même $X - SX$ appartient aussi à $E_\lambda(A)$
et nécessairement $X+SX$ ou $X-SX$ (~~est non nul et~~) ne peuvent pas être nuls simultanément. sinon on aurait $SX = 0$ avec S inversible et $X \neq 0$

- si $X+SX \neq 0$, il est vecteur propre de A

on $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $[X+SX]_i = x_i + x_{n+1-i}$

et $[X+SX]_{n+1-i} = [X+SX]_i$

donc $X+SX \in F$

- si $X-SX \neq 0$, il est vecteur propre de A

$\forall i \in [\![1,n]\!]$ $[X-SX]_i = x_i - x_{n+1-i}$

et $[X-SX]_{n+1-i} = x_{n+1-i} - x_i = -[X+SX]_i$

d'où $X-SX \in G$

cqfd

Problème Ⓐ 1) $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$ en effet, soit on a tiré une blanche au premier et on la remet, soit on ne l'a pas tirée mais on en met une autre puisqu'on a tiré une noire.

$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ probabilité de tirer la blanche au 1e tirage
$P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$ " " noire "

$E(X_1) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$

$V(X_1) = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

2) $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. soit $X_1 = 1$ et on tire la blanche, on la remet sans ajout de blanche

. soit $X_1 = 2$ et on tire une blanche, on la remet sans aj…

. soit $X_1 = 2$ et on tire la noire, on ajoute une blanche et sans enlever les 2 autres

on note B_i l'événement tirer une blanche au i-ème tirage

$((X_1=1)\,(X_2=2))$ est un sce

$$P(X_2 = 1) = P_{(X_1=1)}(X_2=1) \cdot P(X_1=1) + \underbrace{P_{(X_1=2)}(X_2=1)}_{=0} \cdot P(X_2=1)$$

$$= P_{(X_1=1)}(B_2) \cdot P(X_1=1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \qquad \underline{P(X_2=1) = \frac{1}{6}}$$

$$P(X_2 = 2) = P_{(X_1=1)}(X_2=2) \cdot P(X_1=1) + P_{(X_1=2)}(X_2=2) \cdot P(X_1=2)$$

$$= P_{(X_1=1)}(\overline{B_2}) \cdot P(X_1=1) + P_{(X_1=2)}(B_2)\, P(X_1=2)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \qquad \underline{P(X_2=2) = \frac{2}{3}}$$

Donc $\underline{P(X_2=3)} = 1 - P(X_2=1) - P(X_2=2) = \underline{\frac{1}{6}}$

3) $k \geq 1$ $X_k(\Omega) = \{1, \dots, k+1\}$

en effet on peut tirer la 1e blanche pendant k tirages donc ne jamais en remettre mais on peut aussi tirer k noires donc remettre k blanches en plus de la 1e. Toutes les situations intermédiaires sont possibles

4) soient $(i,j) \in [\![1, k+1]\!]$

- si $i < j$ $\quad P_{(X_k = j)}(X_{k+1} = i) = 0$ car on ne diminue jamais le nbre de blanches

- si $i > j+1$ $\quad P_{(X_k = j)}(X_{k+1} = i) = 0$ car on ne peut pas rajouter 2 blanches après un tirage

- si $i = j$ $\quad P_{(X_k = j)}(X_{k+1} = j) = P_{(X_k = j)}(B_{k+1})$

or à ce stade, on a dans l'urne avant le $k+1$ ième tirage j blanches et $k - j + 2$ noires

d'où $\quad P_{(X_k = j)}(X_{k+1} = j) = \dfrac{j}{k+2}$

- si $i = j+1$, le même raisonnement conduit à

$$P_{(X_k = j)}(X_{k+1} = j+1) = P_{(X_k = j)}(\overline{B_{k+1}}) = \frac{k+2-j}{k+2}$$

vue la suite, il vaut mieux écrire

$$P_{(X_k = i-1)}(X_{k+1} = i) = \frac{k+2-(i-1)}{k+2} = \frac{3+k-i}{k+2}$$

5) Si $i \in \mathbb{N}^*$ $\quad (X_k = i-1)\ (X_k = i)$ constitue un sce

et $\quad P(X_{k+1} = i) = \dfrac{i}{k+2} P(X_k = i) + \dfrac{3+k-i}{k+2} P(X_k = i-1)$

Problème (A) 1) $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$ en effet, soit on a tiré une blanche au premier et on la remet, soit on ne l'a pas tirée mais on en met une autre puisqu'on a tiré une noire.

$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ probabilité de tirer la blanche au 1e tirage
$P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$ " " noire "

$E(X_1) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$

$V(X_1) = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

2) $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. soit $X_1 = 1$ et on tire la blanche, on la remet sans ajout de blanche,
. soit $X_1 = 2$ et on tire une blanche, on la remet sans aj...
. soit $X_1 = 2$ et on tire la noire, on ajoute une blanche et sans enlever les 2 autres

on note B_i l'événement tirer une blanche au i-ème tirage

$((X_1=1)(X_2=2))$ est un sce

$$P(X_2 = 1) = P_{(X_1=1)}(X_2=1) \cdot P(X_1=1) + \underbrace{P_{(X_1=2)}(X_2=1)}_{=0} \cdot P(X_2=1)$$

$$= P_{(X_1=1)}(B_2) \cdot P(X_1=1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \qquad \underline{P(X_2=1) = \frac{1}{6}}$$

$$P(X_2 = 2) = P_{(X_1=1)}(X_2=2) \cdot P(X_1=1) + P_{(X_1=2)}(X_2=2) \cdot P(X_1=2)$$

$$= P_{(X_1=1)}(\overline{B_2}) \cdot P(X_1=1) + P_{(X_1=2)}(B_2) \, P(X_1=2)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \qquad \underline{P(X_2=2) = \frac{2}{3}}$$

Donc $\underline{P(X_2=3)} = 1 - P(X_2=1) - P(X_2=2) = \underline{\frac{1}{6}}$

3) $k \geq 1$ $X_k(\Omega) = \{1, \dots, k+1\}$

en effet on peut tirer la 1e blanche pendant k tirages donc ne jamais en remettre mais on peut aussi tirer k noires donc remettre k blanches en plus de la 1e. Toutes les situations intermédiaires sont possibles

4) soient $(i,j) \in [\![1, k+1]\!]$

- si $i < j$ $\quad P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i) = 0$ car on ne diminue jamais le nbre de blanches

- si $i > j+1$ $\quad P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i) = 0$ car on ne peut pas rajouter 2 blanches après un tirage

- si $i = j$ $\quad P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = j) = P_{(X_k=j)}(B_{k+1})$

or à ce stade, on a dans l'urne avant le $k+1$ ième tirage j blanches et $k-j+2$ noires

d'où $\quad P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = j) = \dfrac{j}{k+2}$

- si $i = j+1$, le même raisonnement conduit à

$$P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = j+1) = P_{(X_k=j)}(\overline{B_{k+1}}) = \frac{k+2-j}{k+2}$$

vue la suite, il vaut mieux écrire

$$P_{(X_k=i-1)}(X_{k+1} = i) = \frac{k+2-(i-1)}{k+2} = \frac{3+k-i}{k+2}$$

5) Si $i \in \mathbb{N}^*$ $\quad (X_k = i-1)\ (X_k = i)$ constitue un sce pour $(X_{k+1} = i)$

et $\quad P(X_{k+1} = i) = \dfrac{i}{k+2} P(X_k = i) + \dfrac{3+k-i}{k+2} P(X_k = i-1)$

6) $X_3(\Omega) = [\![1, 4]\!]$

$P(X_3 = 1) = \frac{1}{4} P(X_2 = 1) + 0 = \frac{1}{24}$

$P(X_3 = 2) = \frac{2}{4} P(X_2 = 2) + \frac{3}{4} P(X_2 = 1) = \frac{11}{24}$

$P(X_3 = 3) = \frac{3}{4} P(X_2 = 3) + \frac{1}{2} P(X_2 = 2) = \frac{11}{24}$

$P(X_3 = 4) = \underbrace{P(X_2 = 4)}_{=0} + \frac{1}{4} P(X_2 = 3) = \frac{1}{24}$

7 ⓐ soit $k \in \mathbb{N}$ $(X_k = 1)$ signifie que l'on tire la boule blanche à chaque tirage, du 1er au k-ième.

$P(X_k = 1) = P(B_1 \cap \dots \cap B_k)$

Comme $P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) \neq 0$, on utilise la formule des probas composées.

$P(B_1 \cap \dots \cap B_k) = P(B_1) . P_{B_1}(B_2) . P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \dots P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(B_k)$

$= \frac{1}{2} . \frac{1}{3} \dots . \frac{1}{k+1} = \underline{\frac{1}{(k+1)!}}$

(à chaque tirage on a 1 blanche et des noires s'incrémentant de 1 unité)

ⓑ $(X_k = k+1)$ signifie que l'on ne tire que la boule noire (celle présente au 1e tirage) à chaque fois et qu'on rajoute une blanche.

le calcul est identique au précédent (symétrie)

D'où $\underline{P(X_k = k+1) = \frac{1}{(k+1)!}}$

ⓒ $P(X_{k+1} = 2) = \frac{2}{k+2} P(X_k = 2) + \frac{k+1}{k+2} P(X_k = 1)$

$= \frac{2}{k+2} P(X_k = 2) + \frac{k+1}{(k+2)!}$

$$\underbrace{(k+2)!\,P(X_{k+1}=2)}_{a_{k+1}} = 2.\underbrace{(k+1)!\,P(X_k=2)}_{a_k} + (k+1)$$

d'où $\underline{a_{k+1} = 2a_k + (k+1)}$

$$a_{k+1} + k+1+2 = 2a_k + k+1 + k+1 + 2$$

$$= 2(a_k + k + 2)$$

d'où $\underline{b_{k+1} = 2b_k}$

Donc $(b_k)_{k\geq 0}$ est géométrique et $\forall k \geq 0 \quad b_k = 2^k b_0$

or $b_0 = a_0 + 2$ et $a_0 = 0$

d'où $b_k = 2^{k+1}$

donc $(k+1)!\,P(X_k=2) = 2^{k+1} - k - 2$

d'où $$\underline{P(X_k=2) = \frac{2^{k+1}-k-2}{(k+1)!}}$$

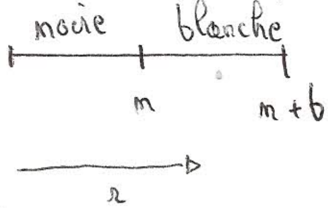
Partie B

8) compteur de boules blanches après k tirages

rand(n+b) + 1 génère un nombre aléatoire appartenant à $]1, n+b+1[$

floor (rand() * (n+b) + 1) génère un entier de $[\![1, n+b]\!]$

. si $r > n$ on considère qu'on a tiré une blanche et on incrémente le compteur de noires



⑨ mystere va permettre de simuler k tirages successifs. On va stocker le résultat obtenu (nombre de blanches) et lorsqu'on aura fait N simulations, on établira un comptage des occurences

```
function LE = loi_exp(k, N)
    LE = zeros(1, k+1)
    for i = 1 : N
        x = mystere(k)
        LE(x) = LE(x) + 1
    end
    LE = LE / N
endfunction
```

10. . $\Pi(k+1, 1) = 1/(k+1) * \Pi(k, 1)$

$\Pi(k+1, i) = i/(k+2)\,\Pi(k, i) + (3+k-i)/(k+2) * \Pi(k, i-1)$

. $\Pi(k+1, k+2) = 1/(k+1) * \Pi(k, k+1)$

. $LT = \Pi(k+1, :)$

11. $P(X_5 = 1) \neq P(X_5 = 6)$ à 10^{-5} près

donc le calcul n'est pas théorique sinon on aurait dû avoir

$$P(X_5 = 1) = P(X_5 = 6) = \frac{1}{6!}$$

Partie C

12 a) $E(X_k)$ existe pour tout k (support fini)

soit $k \in \mathbb{N}$

$$E(X_{k+1}) = \sum_{m=1}^{k+2} m\, P(X_{k+1} = m)$$

$$= \sum_{m=1}^{k+2} m \left(\frac{m}{k+2} P(X_k = m) \right) + \sum_{m=1}^{k+2} m \left(\frac{3+k-m}{k+2} \right) P(X_k = m-1)$$

$$= \frac{1}{k+2} \sum_{m=1}^{k+1} m^2 P(X_k = m) + \sum_{m=2}^{k+2} m\,(3+k-m)\, P(X_k = m-1)$$

(on enlève les probas nulles)

On effectue le changement d'indice $n \leftarrow n-1$ ds la 2^e somme. 15

$$E(X_{k+1}) = \frac{1}{k+2}\sum_{n=1}^{k+1} n^2 P(X_k = n) + \frac{1}{k+2}\sum_{n=1}^{k+1}(n+1)(2+k-n)\, P(X_k = n)$$

$$= \frac{1}{k+2}\sum_{n=1}^{k+1}(2+k)n\, P(X_k = n) + \frac{1}{k+2}\sum_{n=1}^{k+1}(2+k)\, P(X_k = n)$$

$$+ \frac{1}{k+2}\sum_{n=1}^{k+1} -n\, P(X_k = n)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k+2}\sum_{n=1}^{k+1}(k+1)n\, P(X_k = n)}_{=(k+1)E(X_k)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{k+1} P(X_k = n)}_{=1}$$

D'où $$E(X_{k+1}) = \frac{(k+1)E(X_k)}{k+2} + 1$$

(b) Récurrence (à formaliser ...)

Init : $E(X_1) = \frac{3}{2} = \frac{1+2}{2}$ $\rightarrow$ $E(X_0) = \frac{1}{2} = \frac{0+1}{2}$ ok

Hérédité : on suppose $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k) = \frac{k+2}{2}$

$$E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{k+2}{2} + 1 = \frac{k+3}{2} = \frac{(k+1)+2}{2}$$

cqfd

(c) $X_k + Y_k = k+2$ par linéarité de l'espérance, on a alors

$$E(X_k) + E(Y_k) = k+2$$

d'où $E(Y_k) = \frac{k+2}{2} = E(X_k)$

13 (a) Inégalité de Bienaymé Tchebychev appliquée à $\frac{X_k}{k+2}$ qui admet une variance.

$\forall \alpha > 0$ ~~[illegible]~~ $P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - E\left(\frac{X_k}{k+2}\right)\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{V}{\alpha^2}\left(\frac{X_k}{k+2}\right)$

$V\left(\frac{X_k}{k+2}\right) = \frac{1}{(k+2)^2}V(X_k)$

d'où $$P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{12(k+2)\alpha^2}$$

Donc $\lim_{k \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right) = 0$

d'où $\lim_{k \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) = 1$

b) Intuitivement, on peut penser que le nombre de blanches tirées et de noires tirées s'équilibrent lorsque le nombre de tirages tend vers $+\infty$

Partie D

14) a) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi_{ij}(P+\lambda Q) = j(P+\lambda Q)(X+1) - i(P+\lambda Q)(X) = j\,P(X+1) - i\,P(X)$
$+ \lambda\, jQ(X+1) - \lambda i Q(X)$

$= \varphi_{ij}(P) + \lambda \varphi_{ij}(Q)$

Donc φ_{ij} linéaire.

b) $\deg P(X+1) = \deg P$
$\deg P(X) = \deg P$

P s'écrit $aX^n + Q(X)$ $\quad a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
avec $n = \deg P$
et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

$\varphi_{ij}(P) = \varphi_{ij}(aX^n) + \underbrace{\varphi_{ij}(Q)}_{\deg \leq n-1}$

$= j\,a(X+1)^n - i\,a\,X^n + \varphi_{ij}(Q)$

$= a(j-i)X^n + \underbrace{aj\sum_{k=0}^{n-1} X^k \binom{n}{k} + \varphi_{ij}(Q)}_{\deg \leq n-1}$

or $i \neq j$ d'où $\deg \varphi_{ij}(P) = \deg(P)$

c) soit P tel que $\varphi_{ij}(P) = 0$ alors $\deg \varphi_{ij}(P) = -\infty$
donc $\deg P = -\infty$ donc $P = 0$
d'où φ_{ij} injective.

d) . si $P = 0$ on pose $Q = 0$ et $\varphi_{ij}(Q) = P$

. on suppose $P \neq 0$.

soit $n \in \mathbb{N}$ 17

- φ_{ij} restreint à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme car linéaire et $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\deg \varphi_{ij}(P) = \deg P$ d'où $\varphi_{ij}(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

or φ_{ij} est injective, donc sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ l'est également et comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, cette restriction est bijective.

donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists Q \in \mathbb{R}_n[X]$ $\varphi_{ij}(Q) = P$

Donc si $P \in \mathbb{R}[X]$, soit n son degré, $\exists Q \in \mathbb{R}_n[X]$ $\varphi_{ij}(Q) = P$

15 a) $P_{2,1}(X) = \varphi_{2j}^{-1}(3+X-2)\, P_{1,1}(X) = \varphi_{2j}^{-1}(X+1)$

Calculons la matrice de φ_{21} dans $\mathbb{R}_1[X]$

$\varphi_{21}(1) = 1-2 = -1$

$\varphi_{21}(X) = X+1-2X = -X+1$ d'où $\mathcal{M}(\varphi_{21}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{M}(\varphi_{21}^{-1}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d'où $\varphi_{21}^{-1}(X+1) = -1-X-1 = -X-2$

d'où $P_{2,1}(X) = -X-2$

$P_{2,2}(X) = -\sum_{j=1}^{1} P_{2,j}(0) = -P_{2,1}(0) = 2$

$P_{2,2}(X) = 2$

b) $P_{3,2}(X) = \varphi_{3,2}^{-1}(X)\, P_{2,2}(X) = 2\varphi_{3,2}^{-1}(X)$

on cherche la matrice de $\varphi_{3,2}$ restreint à $\mathbb{R}_1[X]$

$\varphi_{3,2}(1) = 2.1 - 3.1 = -1$

$\varphi_{3,2}(X) = 2(X+1) - 3X = -X+2$ $\mathcal{M}(\varphi_{3,2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{M}(\varphi_{3,2}^{-1}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d'où $\varphi_{3,2}^{-1}(X) = -X-2$

d'où $P_{3,2}(X) = -2X-4$

16 a) $k \in \mathbb{N}$ $\quad P(X_k = 1) = \dfrac{1}{(k+1)!} = \dfrac{1}{(k+1)!} \cdot 1 \cdot 1$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\, p_{1,1}(k) \cdot 1^k$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{1} p_{1,j}(k)\, j^k$$

donc H_1 est vraie.

b) H_{i-1} vraie donc $P(X_k = i-1) = \dfrac{1}{(k+1)!} \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} p_{i-1,j}(k)\, j^k$

$k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{k+1} = (k+2)!\, P(X_{k+1} = i) - \sum_{j=1}^{i-1} p_{i,j}(k+1)\, j^{k+1}$$

$$\alpha_{k+1} = (k+2)!\left(\frac{i}{k+2} P(X_k = i) + \frac{3+k-i}{k+2} P(X_k = i-1) \right) - \sum_{j=1}^{i-1} p_{i,j}(k+1)\, j^{k+1}$$

or $(3+k-i)\, p_{i-1,j}(k) = \left(\varphi_{i,j}(p_{i,j}(X))\right)(k)$

d'où $\alpha_{k+1} = (k+1)!\; i\, P(X_k = i) + (k+1)!\; (3+k-i)\, P(X_k = i-1)$

$$- \sum_{j=1}^{i-1} p_{i,j}(k+1)\, j^{k+1}$$

$$= i\left(\alpha_k + \sum_{j=1}^{i-1} p_{i,j}(k)\, j^k\right) - \sum_{j=1}^{i-1} p_{i,j}(k+1)\, j^{k+1}$$

$$+ (k+1)!\,(3+k-i)\, P(X_k = i-1)$$

$$= i\alpha_k + \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1}\left(i\, p_{i,j}(k) - j\, p_{i,j}(k+1)\right) j^k}_{= -\sum_{j=1}^{i-1} \left(\varphi_{i,j}(p_{i,j})\right)(k)\, j^k} + (k+1)!\,(3+k-i)\, P(X_k = i-1)$$

on applique H_{i-1} à k

$$= i\alpha_k - \sum_{j=1}^{i-1} \varphi_{i,j}(p_{i,j})(k)\, j^k + (k+1)!\,(3+k-i)\, \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{i-1} p_{i-1,j}(k)\, j^k$$

$$= i\alpha_k - \sum_{j=1}^{i-1} \cancel{\left(\varphi_{i,j}(p_{i,j})\right)(k)}\, j^k + \sum_{j=1}^{i-1} \cancel{\left(\varphi_{i,j}(p_{i,j})\right)(k)}\, j^k = i\alpha_k$$

D'où $\alpha_{k+1} = i\,\alpha_k$

Donc la suite est géométrique.

$$\alpha_0 = \underbrace{P(X_0 = i)}_{0} - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0)} = P_{i,i}(X)$$

$$= P_{i,i}(X) = P_{i,i}(k) \text{ car polynôme constant}$$

$$\alpha_0 = P_{i,i}(X) = P_{i,i}(k)$$

Donc $\alpha_k = i^k P_{i,i}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

Donc pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X_k = i) = \dfrac{1}{(k+1)!}\left(\alpha_k + \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)\, j^k\right)$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\left(i^k P_{i,i}(k) + \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)\, j^k\right)$$

$$P(X_k = i) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k)\, j^k$$

d'où $\mathcal{H}_i$ est vraie

c) Récurrence OK, $\mathcal{H}_i$ toujours vraie.

(17) a) $P_{2,1}(X) = -X-2$

$P_{2,2}(X) = 2$

donc $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{6} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} P_{i,j}(1)\, j$

$$= \frac{1}{6}\left(P_{1,1}(1) + 2\,P_{i,2}(1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(-3 + 4\right) = \frac{1}{6}$$

pas ce qui est demandé (je fatigue...)

soit $k \in \mathbb{N}$

$$P(X_k = 2) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{2} P_{2,j}(k)\, j^2 \qquad (\text{on utilise } H_i)$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\left(P_{2,1}(k) + 2^k P_{2,2}(k)\right)$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\left(-k-2+2^k.2\right) = \frac{1}{(k+1)!}\left(2^{k+1} - k - 2\right)$$

on retrouve le résultat 7c

b) $$P(X_k = 3) = \frac{1}{4!}\left(P_{3,1}(k) + 2^k P_{3,2}(k) + 3^k P_{3,3}(k)\right)$$

$$\left|\begin{array}{l} P_{3,1}(k) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 \\ P_{3,2}(k) = -2k - 4 \\ P_{3,3}(k) = 3 \end{array}\right.$$

$$P(X_k = 3) = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 - (2k+4)2^k + 3^{k+1}\right)$$

$$P(X_k = 3) = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 - (k+2)2^{k+1} + 3^{k+1}\right)$$

Vérif : $P(X_3 = 1) = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 + 9 - 3.4\right) = \frac{1}{24}$ ouf !!