EDHEC 2019 ECE Problème Densités et estimations (1

1). $\forall x \in [1,+\infty[$ $\theta x^{1+\frac{1}{\theta}} > 0$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0}$ (1)

- f est continue sur $[1,+\infty[$ comme quotient à dénominateur non nul sur $[1,+\infty[$

Ainsi $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{1\}}$

- $\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = 0$

Soit $x \in [1,+\infty[$. on a :

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{\theta} \frac{1}{t^{1+\frac{1}{\theta}}}\,dt \quad \text{et par linéarité}$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_1^x t^{-1-\frac{1}{\theta}}\,dt = \frac{1}{\theta}\left[\frac{t^{-1-\frac{1}{\theta}+1}}{-1-\frac{1}{\theta}+1}\right]_1^x$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\frac{t^{-\frac{1}{\theta}}}{-\frac{1}{\theta}}\right]_1^x = \frac{1}{\theta}\left[\theta - \theta x^{-\frac{1}{\theta}}\right]$$

$$\int_1^x f(t)\,dt = 1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} \quad \text{or} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} = 0 \quad \text{car } \frac{1}{\theta} > 0$$

$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ et par la relation de Chasles $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1}$ (3)

De (1), (2) et (3), on déduit : $\boxed{f \text{ peut être considérée comme une densité}}$

2/ • Espérance :

- $\int_{-\infty}^{1} |t f(t)| dt = 0$

- Soit $x \in [1, +\infty[$

$$\int_1^x |t f(t)| dt = \int_1^x t f(t) dt = \int_1^x \frac{1}{\theta} \frac{t}{t^{1+\frac{1}{\theta}}} dt$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_1^x t^{1-1-\frac{1}{\theta}} dt = \frac{1}{\theta} \int_1^x t^{-\frac{1}{\theta}} dt$$

$$= \frac{1}{\theta} \left[\frac{t^{-\frac{1}{\theta}+1}}{-\frac{1}{\theta}+1} \right]_1^x = \frac{1}{\theta} \left[\frac{\theta}{1-\theta} - \frac{\theta}{1-\theta} \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{1-\theta} \left[1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}-1}} \right]$$

or $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$ donc $\frac{1}{\theta} > 2$ et $\frac{1}{\theta} - 1 > 1$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{\theta}-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x |t f(t)| dt = \frac{1}{1-\theta}$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)| dt$ converge donc X possède une espérance

et $\boxed{E(X) = \frac{1}{1-\theta}}$

- Variance :

Par un calcul analogue, on montre que $E(X^2)$ existe et

$$E(X^2) = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x t^2 f(t)\,dt = \frac{1}{1-2\theta}$$

et $$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{1-2\theta} - \frac{1}{(\theta-1)^2}}$$

3) D'après 1) on a directement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$$

4) a) $F(x) = \frac{1}{2}$ n'admet pas de solution sur $]-\infty, 1[$

pour $x \geq 1$, on a :

$$F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{\theta}} = 2$$

$u \mapsto u^\theta$ est une bijection sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{\theta}}\right)^\theta = 2^\theta \Leftrightarrow \boxed{x = 2^\theta}$$

Ainsi $F(x) = \frac{1}{2}$ possède une unique solution :

$$\boxed{m_e = 2^\theta}$$

4) b) m1 (lourde) étude de fonction

on étudie $h : x \mapsto 2^x(1-x) - 1$ et on montre que

$$\forall x \in [0, \tfrac{1}{2}] \quad h(x) \leq 1$$

m2 Astucieuse

(Brouillon : on veut mq $\forall x \in [0, \tfrac{1}{2}]$

$$2^x(1-x) \leq 1 \quad \text{ie} \quad 1-x \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^x$$

ie $1-x \leq e^{x \ln \frac{1}{2}}$

or $e^x \geq 1+x$ (convexité de exp)

donc $e^{x \ln \frac{1}{2}} \geq 1 + x \ln \frac{1}{2}$

$$\geq 1 - (\ln 2)\, x \geq 1 - x \quad \text{car } -\ln 2 \geq -1 \ldots)$$

Rédaction : exp est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = 1+x$

Donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad e^t \geq 1+t$

Soit $x \in [0, \tfrac{1}{2}]$. Pour $t = x \ln(\tfrac{1}{2})$ il vient :

$$e^{x \ln \frac{1}{2}} \geq 1 + x \ln\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

or $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \geq -\ln e = 1$

Donc $e^{x \ln \frac{1}{2}} \geq 1 - x$

ie $\left(\tfrac{1}{2}\right)^x \geq 1-x$ ie $2^x(1-x) \leq 1$

Bilan : $\boxed{\forall x \in [0, \tfrac{1}{2}] \quad 2^x(1-x) \leq 1}$

c) on a d'après b) $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ $2^x \leq \frac{1}{1-x}$ (car $1-x>0$)

donc pour $x = \theta \in]0, \frac{1}{2}[$, on a :

$$2^\theta \leq \frac{1}{1-\theta} \quad \text{d'où : } \boxed{Me \leq E(X)}$$

5) $a \geq 1$ donc $P(X>a)>0$. Par la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_{(X>a)}(X>a+b) = \frac{P\left((X>a)\cap(X>a+b)\right)}{P(X>a)}$$

or $[X>a+b]$ réalisé $\Rightarrow$ $[X>a]$ réalisé

donc $(X>a+b) \subset (X>a)$ et $(X>a)\cap(X>a+b) = (X>a+b)$

Donc $$P_{(X>a)}(X>a+b) = \frac{P(X>a+b)}{P(X>a)} = \frac{1-P(X\leq a+b)}{1-P(X\leq a)}$$

$$= \frac{1-F(a+b)}{1-F(a)} = \frac{\frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{\theta}}}}{\frac{1}{a^{1/\theta}}}$$

Finalement : $\boxed{P_{(X>a)}(X>a+b) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}}$

b) $a+b \underset{a\to+\infty}{\sim} a$ donc $\frac{a}{a+b} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{1}{\theta}} = 1$

Donc $\lim\limits_{a\to+\infty} P_{(X>a)}(X>a+b) = 1$ | Interprétation : Si l'appareil est encore en vie après une durée "a" très longue, alors il sera presque sûrement encore en vie pour une durée quelconque.

II) 6) a) $X(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $(\ln X)(\Omega) = [0, +\infty[$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}$, $G(x) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $G(x) = P(Y \leq x) = P(\ln X \leq x)$

$= P(X \leq e^x) = F(e^x)$

Bilan : $\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(e^x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$

b) $\forall x \geq 0$, $F(e^x) = 1 - \dfrac{1}{(e^x)^{\frac{1}{\theta}}} = 1 - (e^{-x})^{\frac{1}{\theta}} = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}x}$

Ainsi $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)}$

7)
```
p= input('entrer un réel theta strictement compris entre 0 et 1/2')
disp (grand(1,1,'exp', theta)
```

III) 8) a) T_n est une fonction de $Y_1, \ldots, Y_n$ indépendante de θ donc T_n est un estimateur de θ.

b) $E(T_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$ et par linéarité de l'espérance

existe...

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(Y_k)$ or $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $E(Y_k) = \theta$

$= \frac{n\theta}{n} = \theta$ donc $\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$

c). en notant b le biais de T_n, on a :

$$r_\theta(T_n) = b^2 + V(T_n) \quad \text{or } b = 0 \text{ donc}$$

$$r_\theta(T_n) = V(T_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$$

et par indépendance des (Y_k) :

$$r_\theta(T_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\theta^2 = \underline{\frac{\theta^2}{n}}$$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} r_\theta(T_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\theta^2}{n} = 0$

Donc T_n <u>est un estimateur convergent de θ</u>.

9)a). T_n possède une variance donc on a l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$$

ie $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad P(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}}$ $(*)$

b) d'après $(*)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 1 - P(|T_n - \theta| < \varepsilon) \leq \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$

ie $\forall \varepsilon > 0, \quad P(-\varepsilon < T_n - \theta < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$

ie $\forall \varepsilon > 0, \quad P(-T_n - \varepsilon < -\theta < -T_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$

$$P(T_n - \varepsilon < \theta < T_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$

D'où : $\forall \varepsilon > 0, \ P(\theta \in]T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon[) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$

or, si $[\theta \in]T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon[]$ est réalisé, alors l'événement

$[\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]]$ l'est également donc

$$[\theta \in]T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon[] \subset [\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]]$$

et donc $P(\theta \in]T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon[) \leq P(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon])$

Par transitivité des inégalités, on conclut :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ P(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}}$$

c) $\theta^2 \leq \frac{1}{4}$ donc $1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ - On cherche ε tq $1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq \frac{90}{100}$

Comme $n = 1000$, on résout :

$$1 - \frac{1}{4000\varepsilon^2} \geq \frac{90}{100} \iff \frac{1}{4000\varepsilon^2} \leq \frac{10}{100} \iff 4000\varepsilon^2 \geq 10$$

$$\iff \varepsilon^2 \geq \frac{1}{400} \iff \varepsilon \geq \frac{1}{\sqrt{400}} \iff \boxed{\varepsilon \geq \frac{1}{20}}$$

Ainsi $\left[T_n - \frac{1}{20}, T_n + \frac{1}{20}\right]$ est un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% pour $n = 1000$