EDHEC 2019 ECE Ex 1 Algèbre

1) a) $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Donc : $A^2 - 2A + I^2 = 0$

ie $A(A-2I) = -I$

ie $A(2I - A) = I = (2I-A)A$

A est donc inversible $\boxed{\text{et } A^{-1} = 2I - A}$

2) a) • $N = A - I$ donc $N^2 = 0$ et $\forall n \geq 2$, $N^n = 0$

• N et I commutent donc par le Binôme de Newton, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$

- Si $n = 0$: $A^0 = N^0 = I$

- Si $n = 1$: $A^1 = A = N + I$

- Si $n \geq 2$: $A^n = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k}_{=0}$ car $N^k = 0$

$= I + nN$

Dans tous les cas : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = I + nN}$

c) on remarque que $A^{-1} = 2I - A = 2I - (N+I) = I - N = I + (-1)N$

Donc l'expression précédente est encore valable pour $n = -1$.

3)a) • $(A-I)^2=0$ donc $(X-1)^2$ est un polynôme annulateur (2) de A admettant 1 pour unique racine donc :

$$\boxed{Sp(A) \subset \{1\}}$$

• $A-I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque alors que les 3 colonnes sont de la forme $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha=1$ ou $\alpha=-1$

donc ces 3 colonnes sont liées à 1 seule colonne de A

On conclut que $rg(A-I)=1$ ie $\dim \operatorname{Ker}(f-Id)=2$

(th du rang). 1 est donc bien valeur propre de A

Bilan : $\boxed{\text{1 est la seule valeur propre de A}}$

b) m1 : $\dim \operatorname{Ker}(f-Id)=2 \neq \dim \mathbb{R}^3$

donc A n'est pas diagonalisable

m2 : Supposons A diagonalisable.

Alors $\exists P \in Gl_3(\mathbb{R})$ / $A=PDP^{-1}$ avec $D=I$

donc $A=PIP^{-1}=PP^{-1}=I$

Absurde car $A \neq I$

Donc A non diagonalisable.

4) a) D'après 3)a), $\underline{rg(f - Id) = rg(A - I) = 1}$ (3

b) Mq $(u_1, u_2) \in \ker(f - Id)^2$

. $(f - id)((f - Id)(e_1)) = (f - id) \circ (f - id)(e_1) = (f - Id)^2(e_1)$

or $(A - I)^2 = 0$ donc $(f - Id)^2 = 0$

et $(f - id)(u_1) = 0$. Ainsi $\boxed{u_1 \in \ker(f - Id)}$

. $u_2 = (1, 0, -1)$

et $(A - I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $(f - Id)(u_2) = 0$

Ainsi $\boxed{u_2 \in \ker(f - Id)}$

. Mq (u_1, u_2) libre de $\ker(f - Id)$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ / $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha (f - Id)(e_1) + \beta e_1 + \beta e_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha(-e_1 - 2e_2 + e_3) + \beta e_1 + \beta e_3 = 0$

$\Rightarrow (\beta - \alpha) e_1 - 2\alpha e_2 + (\beta + \alpha) e_3 = 0$ (e_1, e_2, e_3) libre donc :

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ -2\alpha = 0 \\ \beta + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$\begin{cases} (u_1, u_2) \text{ est une famille libre de } \ker(f - Id) \text{ de cardinal } 2 \\ \dim \ker(f - Id) = 2 \end{cases}$ on conclut : $\underline{(u_1, u_2) \text{ base de } \ker(f - Id)}$

5) a) $(f - Id)(e_1) \neq 0$ donc $e_1 \notin Ker(f - Id)$ (4

m1 i.e $e_1 \notin vect(u_1, u_2)$

Donc (u_1, u_2, e_1) forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$

de cardinal 3 avec $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

Bilan : $\boxed{(u_1, u_2, e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

m2 on sup $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma e_1 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

b) $\begin{cases} (f - Id)(u_1) = 0 & \text{donc } f(u_1) = u_1 \\ (f - Id)(u_2) = 0 & \text{donc } f(u_2) = u_2 \\ (f - Id)(e_1) = u_1 & \text{donc } f(e_1) = u_1 + e_1 \end{cases}$

Donc en notant $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, e_1)$, on a :

$$\boxed{T = mat_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

6) on remarque que $\begin{cases} u_1 = (f - Id)(e_1) = -e_1 - 2e_2 + e_3 \\ u_2 = e_1 + e_3 \\ e_1 = e_1 \end{cases}$

on remarque donc que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. P est donc inversible et par la formule de changement de base : $\boxed{A = P T P^{-1}}$

7)a). Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$MT = TM \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b & a+c \\ d & e & d+f \\ g & h & g+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} g=0 \\ h=0 \\ a=i \\ d=0 \end{cases}$$

Ainsi M est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$$\text{ie } M = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{1,1}+E_{1,3}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{1,2}}$$

$$+ e\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{2,2}} + f\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{2,3}}$$

$$+ c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{1,3}}$$

Ainsi $M \in E \Rightarrow M \in \text{Vect}(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$

Donc $E \subset \text{Vect}(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$

. et comme $E_{1,1} + E_{3,3} \in E$ (évident)

$E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}$ également éléments de E

on conclut $\text{Vect}(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}) \subset E$

Par double inclusion :

$$\boxed{E = \text{Vect}(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})}$$

. on montre aisément que $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ forme 1 famille libre de E de cardinal 5 donc

$$\boxed{\dim E = 5}$$

b) $A = PTP^{-1}$ donc

$NA = AN \Leftrightarrow NPTP^{-1} = PTP^{-1}N$ on multiplie à gauche par P^{-1} à droite par P donc

$\Leftrightarrow P^{-1}NPTP^{-1}P = P^{-1}PTP^{-1}NP$

$$\boxed{NA = AN \Leftrightarrow (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)}$$

c) d'après 7)b), $N \in F \Leftrightarrow P^{-1} N P \in E$

$$\Leftrightarrow \exists ! (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \,/\, P^{-1} N P = a(E_{1,1} + E_{3,3}) + b\,E_{1,2} + c\,E_{1,3} + d\,E_{2,2} + e\,E_{2,3}$$

on $\times$ P à gauche
P^{-1} à droite

$$\Leftrightarrow \exists ! (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^4 \,/\, N = a\,P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1} + b\,P E_{1,2} P^{-1} + c\,P E_{1,3} P^{-1} + d\,P E_{2,2} P^{-1} + e\,P E_{2,3} P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow N \in \mathrm{Vect}\left(P(E_{1,1} + E_{1,3}),\, P E_{1,2} P^{-1},\, P E_{1,3} P^{-1},\, P E_{2,2} P^{-1},\, P E_{2,3} P^{-1}\right)$$

<u>Bilan</u> : $\boxed{F = \mathrm{Vect}\left(P(E_{1,1} + E_{1,3}),\, P E_{1,2} P^{-1},\, P E_{1,3} P^{-1},\, P E_{2,2} P^{-1},\, P E_{2,3} P^{-1}\right)}$