sans remise
jusqu'à apparition de la BN

B_i : « i^e tirage = BB » ; X = rang apparition BN

1) Procédons par double inclusion

• Montrons que $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$:

au minimum X vaut 1 lorsqu'on tire la BN au 1^e tirage

au maximum X vaut n lorsqu'on tire d'abord les $n-1$ BB puis la BN au n^e tirage

et comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (évident), on a bien

$$\boxed{X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]}$$

• Montrons que $[\![1, n]\!] \subset X(\Omega)$:

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Cherchons 1 séquence de tirages telle que la BN soit tirée au k^e tirage (alors l'évènement $(X=k)$ sera réalisé)

Si je tire des BB lors des $(k-1)$ 1^e tirages ($k \geq 2$) et la boule noire au k^e tirage alors $(X=k)$ sera réalisé.

Si $k=1$, il suffit que je tire la BN au 1^e tirage et $(X=1)$ sera réalisé

Ainsi, en notant $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace probabilisé,

on a : $\forall k \in [\![1,n]\!] \ \exists \omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = k$

ce qui prouve $\boxed{[\![1,n]\!] \subset X(\Omega)}$

(Remarque : cette rédaction est délicate mais bienvenue en ECS... En ECE, le correcteur sera bien plus indulgent)

Bilan : $\boxed{X(\Omega) = [\![1,n]\!]}$

2) a) Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$

Si $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ est réalisé, alors on a tiré $i-1$ BB de l'urne contenant initialement 1 BN et $(n-1)$ BB

Ainsi, à l'amorce du i^e tirage, il y a dans l'urne :

$$\begin{cases} n-1-(i-1) \text{ BB} \\ 1 \text{ BN} \end{cases}$$

ie

$$\begin{cases} n-i \text{ BB} \\ n-i+1 \text{ Boules (BB et BN)} \end{cases}$$

Par équiprobabilité, on conclut :

$$\boxed{P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}}$$

2) b) • pour $k=1$, $P(X=1) = \dfrac{1}{n}$ (1 BN sur n boules)

• Soit $k \in [\![2,n]\!]$. On a :

$$(X=k) = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k = \left[\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right] \cap N_k$$

$P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) \neq 0$ donc par la formule des probas composées, on a :

$$P(X=k) = P(B_1)\, P_{B_1}(B_2) \dots P_{B_1\cap\dots\cap B_{i-1}}(B_i) \dots P_{B_1\cap\dots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\, P_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(N_k)$$

$$= \frac{n-1}{n} \times \left[\prod_{i=2}^{k-1} P_{B_1\cap\dots\cap B_{i-1}}(B_i)\right] \times P_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(N_k)$$

et d'après 2)a)

$$= \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\text{terme en } i=1} \times \left[\prod_{i=2}^{k-1} \frac{n-i}{n-i+1}\right] \times P_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(N_k)$$

Si $B_1\cap\dots\cap B_{k-1}$ est réalisé, alors à l'amorce du k^e tirage, il y a 1 BN dans l'urne et $n-1-(k-1)$ BB ie $n-k$ BB

donc $P_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$. Ainsi

$$P(X=k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n-i+1}\right) \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{\left(\prod_{i=1}^{k-1} (n-i)\right)}{\prod_{i=0}^{k-2} (n-i)} \times \frac{1}{n-k+1}$$

$$= \frac{\left[\cancel{\prod_{i=1}^{k-2} (n-i)}\right] \times (n-\cancel{k+1})}{n \times \left[\cancel{\prod_{i=1}^{k-2} (n-i)}\right] \times (\cancel{n-k+1})} = \frac{1}{n}$$

le cas $k=1$ rentre dans le cas général donc

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!] \quad P(X=k) = \frac{1}{n}}$$

c) on reconnaît que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$

donc $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

3) a) Nommons Z_i, $i \in [\![1,n-1]\!]$, l'événement "le i^e tirage donne une boule blanche numérotée "0""

• Alors, on a : $\forall k \in [\![2,n-1]\!]$ $[X=k] \cap [Y=0] = Z_1 \cap \dots \cap Z_{k-1} \cap N_k$

et comme $P(Z_1 \cap \dots \cap Z_{k-1}) \neq 0$ (car $k \in [\![2,n-1]\!]$ ...), on a par la formule des probas composées, pour $k \in [\![2,n-1]\!]$:

$$P((X=k)\cap(Y=0)) = P(Z_1)\, P_{Z_1}(Z_2) \dots P_{Z_1 \cap \dots \cap Z_{k-2}}(Z_{k-1})\; P_{Z_1 \cap \dots \cap Z_{k-1}}(N_k)$$

or :

$$\begin{cases} P(Z_1) = \frac{n-2}{n} \quad (n-2 \text{ BB "0" sur } n \text{ possibles}) \\ P_{Z_1}(Z_2) = \frac{n-3}{n-1} \\ \vdots \\ P_{Z_1 \cap \dots \cap Z_{i-1}}(Z_i) = \frac{n-i-1}{n-i+1} \quad (i \in [\![2,k-1]\!]) \\ \vdots \\ P_{Z_1 \cap \dots \cap Z_{k-2}}(Z_{k-1}) = \frac{n-k}{n-k+2} \\ P_{Z_1 \cap \dots \cap Z_{k-1}}(N_k) = \frac{1}{n-k+1} \end{cases}$$

Ainsi : m1 : avec les "pointillés"

$$P\big((X=k)\cap(Y=0)\big) = \frac{\cancel{n-2}}{n} \times \frac{\cancel{n-3}}{n-1} \times \frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}} \times \dots \times \frac{\cancel{n-k+1}}{n-k+3} \times \frac{n-k}{\cancel{n-k+2}} \times \frac{1}{\cancel{n-k+1}}$$

$$= \frac{n-k}{n(n-1)}$$

m2 : avec les $\prod$.

$$P\big([X=k]\cap[Y=0]\big) = \frac{n-2}{n} \times \left[\prod_{i=2}^{k-1} \frac{n-i-1}{n-i+1}\right] \times \frac{1}{n-k+1}$$

$$= \frac{n-2}{n} \times \frac{\prod_{i=3}^{k}(n-i)}{\prod_{i=1}^{k-2}(n-i)} \times \frac{1}{n-k+1}$$

$$= \frac{\prod_{i=2}^{k}(n-i)}{n(n-1)\times\prod_{i=2}^{k-2}} \times \frac{1}{n-k+1}$$ et par télescopage "multiplicatif"

$$= \frac{[n-\cancel{(k-1)}][n-k]}{n(n-1)(\cancel{n-k+1})} = \boxed{\frac{n-k}{n(n-1)}}$$

- Pour $k=1$, $P\big((X=k)\cap(Y=0)\big) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)}{n(n-1)}$

on rejoint le cas général

- Pour $k=n$: $[X=n]\cap[Y=0] = \emptyset$ car on ne peut pas tirer la BN au dernier tirage sans avoir vidé toutes les BB de l'urne... Donc $P([X=n]\cap[Y=0]) = 0$

$$= \frac{n-n}{n(n-1)}$$

on rejoint encore le cas général

Bilan : $\forall k\in X(\Omega)$ $\boxed{P\big((X=k)\cap(Y=0)\big) = \frac{n-k}{n(n-1)}}$

6

b) $([X=k])_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements de probabilités non nulles donc par la formule des probabilités totales, on a :

$$P([Y=0]) = \sum_{k=1}^{n} P([X=k]\cap[Y=0]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} n-k \qquad \text{posons } j=n-k$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} k = \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

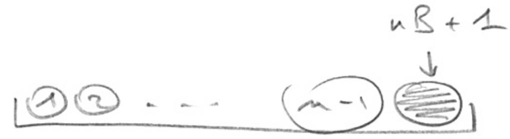
Ainsi $\boxed{P(Y=0) = \frac{1}{2}}$

c) $Y(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(Y=0) = \frac{1}{2}$ donc $P(Y=1) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

et $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})}$; $\boxed{E(Y) = \frac{1}{2} \;;\; V(Y) = \frac{1}{4}}$

4) Informatique :

a) Analysons le script et complétons-le :



(2) nB = n - 1 → il y a n - 1 BB

(3) X = 1 → initialisation de X qui vaut 1

(4) u = grand (1, 1, 'uin', 1, nB + 1) → u va prendre une valeur entière prise au hasard dans [1, n]

(5) while u < nB + 1 → tant que l'on n'a pas tiré la BN

(6) nB = nB - 1 car on enlève une BB de l'urne

(7) u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB + 1) car on refait un tirage dans une urne contenant 1 BB en moins i.e une urne contenant nB boules blanches (= à "l'ancien" nB - 1 BB) et 1 boule noire soit nB + 1 boules.

(8) X = X + 1 car à chaque tour de boucle, X doit être incrémenté de 1 tel un compteur

b) Comme en 4) a) complétons et commentons :

(4) Y = 0 → initialisation de Y à 0 car on n'a pas tiré encore la Boule "1"

(7) nB = nB - 1 → on retire 1 Boule blanche de l'urne

(8) if u == 1 then Y = 1 car dans ce cas, la BB "1" a été tirée

(10) u = grand(1, 1, 'uin', 1, nB + 1) comme en 4) a)

(11) X = X + 1 comme en 4) a)