Exercice 3 EDHEC 2019 ECE

1) • $u_1 = \int_0^1 (1-t^2)\,dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}$

• $u_2 = \int_0^1 (1-t^2)^2\,dt = \int_0^1 1 - 2t^2 + t^4\,dt$

$= \left[t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15-10+1}{15} = \boxed{\frac{6}{15}}$

2)a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégration, on a :

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n\,dt$

$= \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2-1)\,dt$

$= \int_0^1 -t^2(1-t^2)^n\,dt$

or $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq t^2 \leq 1$

Donc $0 \leq 1-t^2 \leq 1$ et comme $u \mapsto u^n$ est croissante sur $[0,1]$

$0 \leq (1-t^2)^n \leq 1$ et $-t^2 \leq 0$ donc

$-t^2(1-t^2)^n \leq 0$

$\begin{cases} t \mapsto -t^2(1-t^2)^n \text{ continue sur } [0,1] \\ 0 < 1 \end{cases}$

Donc par positivité de l'intégration :

$\int_0^1 -t^2(1-t^2)^n\,dt \leq 0$

i.e finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0}$

et (u_n) est décroissante.

b) . Par positivité de l'intégration, on montre également que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 0$

. Ainsi (U_n) est ~~décroissante~~ minorée par 0 donc

$\boxed{(u_n) \text{ converge}}$

3) a) on reconnaît la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1}$ avec $\sigma > 0$

b) (on cherche σ tel que $n = \frac{1}{2\sigma^2}$

ie $\sigma^2 = \frac{1}{2n}$ ie $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2n}}$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

. en posant $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ dans l'intégrale précédente, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-nt^2} dt = 1$$

et par linéarité de l'intégration, comme $\sqrt{2n} \neq 0$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

. $\begin{cases} t \mapsto e^{-nt^2} \text{ est une fonction paire sur } \mathbb{R} \\ \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt \text{ converge} \end{cases}$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$

D'où : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$

c) m1 : étude de fonction en posant $f : t \mapsto e^{-t^2} - 1 + t^2$

m2 : convexité de exp (⚠ très classique)

Soit $g : t \mapsto e^t$ sur $\mathbb{R}$

g C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ $g''(t) = e^t \geq 0$

donc g est convexe sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{C}_g$ est donc au dessus de sa tangente en 0 d'équation :

$$\Delta : y = g'(0)(x-0) + g(0) = 1 + x$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$

Soit alors $t \in \mathbb{R}$. $e^{-t^2} \in \mathbb{R}$ donc en posant

$x = -t^2$ dans l'inégalité précédente :

$$e^{-t^2} \geq 1 - t^2$$

Bilan : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t^2} \geq 1 - t^2}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$
$\forall t \in [0,1]$ $e^{-t^2} \geq 1 - t^2 \geq 0$ et $u \mapsto u^n$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc

$\forall t \in [0,1]$ $0 \leq (1-t^2)^n \leq (e^{-t^2})^n$

$\begin{cases} \text{les fonctions en jeu sont continues sur } [0,1] \\ 0 < 1 \end{cases}$

Donc par croissance de l'intégration :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2}\,dt$$

or $\forall t \in [1, +\infty[$ $e^{-nt^2} \geq 0$ donc $\int_1^{+\infty} e^{-nt^2}\,dt \geq 0$

et comme : $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,dt = \int_0^1 e^{-nt^2}\,dt + \int_1^{\infty} e^{-nt^2}\,dt$

(Relation de Chasles) d'intégrales convergentes

on a : $\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt = \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,dt}_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}} - \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-nt^2}\,dt}_{\geq 0}$

et : $\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$

Par transitivité des inégalités, on conclut :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = 0$ donc par le théorème d'encadrement

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

4) . $\int_0^1 (1-t)^n\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\frac{0^{n+1}}{n+1}}_{=0}$ car $n \geq 0$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 (1-t)^n\,dt = \frac{1}{n+1}}$$

. $\forall t \in [0,1]$ $t^2 \leq t$

donc ——, $0 \leq 1-t \leq 1-t^2$ et par croissance de $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}^+$;

——, $0 \leq (1-t)^n \leq (1-t^2)^n$ par croissance de l'intégration

on conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 (1-t)^n\,dt \leq U_n$

et finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad U_n \geq \frac{1}{n+1}}$

- $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq U_n \\ \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \text{ diverge comme série de Riemann } (\alpha = 1) \end{cases}$

Par critère de comparaison, $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} U_n \text{ diverge}}$

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$U_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\,dt = \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^n\,dt$

m1 : (Brouillon : $u(t) = (1-t^2)^{n+1} \to u'(t) = (n+1)(-2t)(1-t^2)^n$

$v'(t) = 1 \to v(t) = t$)

$t \mapsto (1-t^2)^{n+1}$ et $t \mapsto t$ sont C^1 sur $[0,1]$ donc par intégration par parties, on a :

$U_{n+1} = \left[t(1-t^2)^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 -2(n+1)t^2(1-t^2)^n\,dt$ Astuce :

$= (2n+2) \int_0^1 (\underline{t^2 - 1 + 1})(1-t^2)^n\,dt = \boxed{(2n+2)\left[U_n - U_{n+1}\right]}$

m2 : $U_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\,dt = \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^n\,dt$

$= \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt - \int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,dt$

⚠ $= U_n + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 t\,(-2(n+1)t)(1-t^2)^n\,dt$

(Brouillon : $u = t \to u'(t) = 1$

$v'(t) = -2(n+1)t(1-t^2)^n \to v(t) = (1-t^2)^{n+1}$)

$t \mapsto t$ et $t \mapsto (1-t^2)^{n+1}$ sont C^1 sur $[0,1]$ donc par IPP.

$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2(n+1)} \left[\left[t(1-t^2)^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\,dt \right]$

i.e. $U_{n+1} = U_n - \dfrac{1}{2(n+1)} U_{n+1}$

i.e. $\dfrac{1}{2(n+1)} U_{n+1} = U_n - U_{n+1}$

et finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 2(n+2)\,(U_n - U_{n+1})}$$

__m3__ : on pourrait aussi partir de U_n :

$U_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$ et on remarque $1 = 1 - t^2 + t^2$

$U_n = \int_0^1 \left[(1-t^2) + t^2\right] (1-t^2)^n \, dt$ et par linéarité

$= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} + \int_0^1 t \times t(1-t^2)^n \, dt$

$= U_{n+1} + \int_0^1 t \times \dfrac{1}{-2(n+1)} \times \left[-2(n+1)\right] t\,(1-t^2)^n \, dt$

$= U_{n+1} - \dfrac{1}{2n+2} \int_0^1 t \times \left[-2(n+1)\,t\,(1-t^2)^n\right] dt$

et par IPP on trouve

$U_n = U_{n+1} + \dfrac{1}{2n+2} U_{n+1}$

i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_{n+1} = (2n+2)(U_n - U_{n+1})}$

b) Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Initialisation : $u_0 = 1$

et $\frac{4^0 (0!)^2}{(2\times 0+1)!} = 1$ donc la propriété est initialisée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

on a d'après 5)a) :

$$u_{n+1} = (2n+2)u_n - (2n+2)u_{n+1}$$

ie $(2n+3)u_{n+1} = (2n+2)u_n$

donc $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$ et par HR

$$= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$ on multiplie par $\frac{2n+2}{2n+2}$

$$= \frac{(2n+2)^2\, 4^n (n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}$$

$$= \frac{[2(n+1)]^2\, 4^n (n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{[2(n+1)+1]!}$$

La propriété est héréditaire.

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}}$

c) $\begin{cases} (n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} 2\pi n \times n^{2n} e^{-2n} \\ (2n)! \sim \sqrt{2\pi \times 2n} \times (2n)^{2n} e^{-2n} \end{cases}$

Donc $\dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\cancel{4^n} \times 2\pi\, n^{2n+1} \cancel{e^{-2n}}}{(2n+1)\sqrt{4\pi n}\, \underbrace{\cancel{2^{2n}}}_{=4^n} n^{2n} \cancel{e^{-2n}}}$

ie $\quad u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\pi n}{(2n+1)\sqrt{4}\sqrt{\pi n}}$

ie $\quad u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi n}{(2n+1)\sqrt{\pi n}}$ $\quad$ et comme $2n+1 \underset{+\infty}{\sim} 2n$

$u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi \cancel{n}}{2\cancel{n}\sqrt{\pi n}}$ $\quad$ et $\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{\pi}} = \sqrt{\pi}$

Finalement : $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}}$