EDHEC 2019 ECS - Problème

Rq : Ici X a un support fini donc X admet E(X) et V(X)...

I) 1) $([X=k])_{k\in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements

donc $\sum_{k\in X(\Omega)} P(X=k) = 1$. Or $X(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$ donc

$\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = 1$ on reconnaît $G(1)$

Bilan : $\boxed{G(1) = 1}$

2) G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme donc :

$\forall t\in\mathbb{R}$ $G'(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)kt^{k-1}$

et $G'(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k) = E(X)$

Ainsi : $\boxed{E(X) = G'(1)}$

3) On montre de même que : $G''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k)$

$= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)P(X=k)$

$= \sum_{k\in X(\Omega)} k(k-1)P(X=k)$

Ainsi $G''(1) = E(X(X-1))$ (th de transfert ...)

$= E(X^2-X) = E(X^2) - E(X) = E(X^2) - G'(1)$

Donc $E(X^2) = G''(1) + G'(1)$

Par König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \boxed{G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2}$

II) Archi-classique

4)a) m1 Inégalité des accr^{t} finis

m2 : intégration (plus rapide)

$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [k, k+1] \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

$\begin{cases} \text{les fonctions en jeu sont continues sur } [k, k+1] \\ k \leq k+1 \end{cases}$

Donc par croissance de l'intégration :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ soit finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}} \quad (*)$$

4)b) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

. on somme la partie gauche de (*) pour $k = 1$ à $k = n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln k$$ et par "télescopage"

ie $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) - \ln(1)$ on rajoute le 1er terme :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)}$$

ie $\boxed{U_n \leq \ln(n) + 1}$ (1)

- On somme (*) pour $k=1$ à $k=n-1$ (encore !)

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

ie $\ln(n) - \ln(1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ on rajoute le n° terme de U_n :

alors $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$ et on conclut

$$\boxed{\ln(n) + \frac{1}{n} \leq U_n} \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq U_n \leq \ln(n) + 1}$$

c) on montre aisément par le théorème d'encadrement que $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{\ln n} = 1$ et on conclut :

$$\boxed{U_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n}$$

5) (h_n) est la suite des sommes partielles de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ convergente comme référence de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Ainsi : $\boxed{(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$

III) 6) on va "stocker" la valeur de A(j) dans la variable auxiliaire "aux", puis on va attribuer à la variable A(j) la valeur contenue dans A(p). Enfin, la valeur initiale de A(j), à présent contenue dans aux va être transférée dans A(p). Ce qui donne :

(6)	aux =	A(j)
(7)	A(j) =	A(p)
(8)	A(p) =	aux

7) (Brouillon : pour bien comprendre le fonctionnement des commandes Scilab, prenons qq exemples simples :

• ex 1 : Supposons
$$\begin{cases} A(1) = 1 \\ A(2) = 2 \\ \vdots \\ A(n) = n \end{cases}$$

Dans ce cas : $m = A(1) = 1$

$c = 1$

qd $k = 2$: $A(2) = 2 > 1 = A(1)$ donc $A(2) > A(1)$

et donc m prend la valeur $A(2)$

ie $m = 2$ et $c = 2$

qd $k = 3$, de même, on trouve $m = 3$ et $c = 3$

au final, qd $k = n$, $m = n$ et $c = n$

$\boxed{m = n}$ et $\boxed{c = n}$

• <u>ex 2</u> : Supposons $\begin{cases} A(1) = n \\ A(2) = n-1 \\ \vdots \\ A(1) = n \end{cases}$

Dans ce cas : $m = A(1) = n$

$c = 1$

qd $\underline{k=2}$, $A(2) < A(1)$ donc il ne se passe rien à ce tour de boucle

qd $\underline{k=3}$, idem

$\vdots$

qd $\underline{k=n}$, idem et $\boxed{\begin{array}{l} m = A(1) = n \\ c = 1 \end{array}}$

• <u>ex 3</u> : Supposons ici $n = 4$

et $\begin{cases} A(1) = 2 \\ A(2) = 4 \\ A(3) = 1 \\ A(4) = 3 \end{cases}$

Dans ce cas : $m = A(1) = 2$ et $c = 1$

qd $\underline{k=2}$: $A(2) = 4 > m$ donc $m = A(2) = 4$
$c = 2$

qd $\underline{k=3}$: $A(3) = 1 < m$ donc rien ne se passe

qd $\underline{k=4}$: $A(4) = 3 < m$ donc rien ne se passe

Ainsi, $\boxed{m = 4 \text{ et } c = 2}$

On conjecture ici, grâce aux 3 exemples :

$\boxed{\text{m est toujours égal à n et c est le n° de la case du vecteur A qui prend la valeur n i.e } A(c) = n}$

Rédaction :

a) • m prend d'abord la valeur $A(1) \in [\![1,n]\!]$ et c vaut 1

• qd $\underline{k=2}$, $A(1)$ est comparée à $A(2)$ et si $A(2) > A(1)$ alors m prend la plus grande valeur, ie $m = A(2)$ et c vaut 2.

En revanche si $A(2) \leq A(1)$ alors m et c gardent leur valeur précédente.

• qd $\underline{k=3}$, on répète cette comparaison et m prend une fois de plus la plus grande valeur et en cas d'échange, c prend la valeur de k c'est-à-dire le n° de la composante du vecteur A qui porte la plus grande valeur entre $A(1), A(2), \dots, A(k)$

• la procédé est répété jusqu'à $k=n$ et à l'arrivée m prend la plus grande valeur de $A(1), A(2) \dots A(n)$ c'est à dire $\boxed{m=n}$ (car A est rempli de façon aléatoire par les entiers de $[\![1,n]\!]$)
et c est le n° de la composante de A portant la valeur n ie c est l'entier de $[\![1,n]\!]$ tel que $A(c) = n$

b) déjà dit ! $\boxed{\text{c est l'entier de } [\![1,n]\!] \text{ tq } A(c) = n}$

c)
```
c = find(A > n-1)
disp(c)
```

8) on a $A(1) = 1$ donc $c = 1$ et $X_1 = 1$

X_1 est la variable certaine égale à 1

9) a) Procédons par double inclusion

• Mq $X_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$

Au minimum X_n vaut 1 lorsque $A(1) = n$

Au maximum X_n vaut n lorsque $\begin{cases} A(1) = 1 \\ A(2) = 2 \\ \vdots \\ A(n) = n \end{cases}$

car dans ce cas, à chacun des $n-1$ tours de boucle c va changer de valeur ; et comme c a eu une première affectation initiale ($c=1$), on conclut qu'il y a eu n affectations concernant c.

Donc X_n prend dans ce cas la valeur n.

or $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (évident) donc $X_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$

- Mq $[\![1,n]\!] \subset X_n(\Omega)$:

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Construisons une suite $(A(1), A(2), \dots, A(n))$ telle que c soit sujet à j affectations.

Prenons
$$\begin{cases} A(1) = 1 \\ A(2) = 2 \\ A(3) = 3 \\ \vdots \\ A(j-1) = j-1 \\ A(j) = n \\ A(j+1) = j+1 \\ \vdots \\ A(n-1) = n-1 \\ A(n) = j \end{cases}$$

Au cours du script :

1e affectation : $c = 1$

2e affectation : qd $k=2$, $A(2) > A(1)$ donc $c=2$

3e affectation : qd $k=3$, $A(3) > A(2)$ donc $c=3$

$\vdots$

je affectation : qd $k=j$, $A(j)=n > A(j-1)$ donc $c=j$

et il n'y a plus d'affectation ensuite car $A(j)=n$

Ici, X_n prend bien la valeur j.

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe une suite $(A(1), \dots, A(n))$ telle que $X_n = j$. On conclut : $\boxed{[\![1,n]\!] \subset X_n(\Omega)}$

Bilan : $\boxed{X_n(\Omega) = [\![1,n]\!]}$

b) • $[X_n = 1]$ est réalisé si on a qu'une seule affectation

ie lorsque $A(1) = n$.

Ainsi $[X_n = 1] = [A_1 = n]$. Pour que $[A_1 = n]$ se réalise, il faut et il suffit de :

- attribuer la valeur n à $A(1)$: 1 choix
- attribuer une valeur non encore choisie pour $A(2)$: $(n-1)$ choix
- ——— $A(3)$: $n-2$ ———

⋮

- ——— $A(n)$: 1 choix

Il y a donc $(n-1)!$ cas favorables.

or il y a $n!$ permutations possibles (cf énoncé)

Donc par équiprobabilité :

$$\boxed{p(X_n = 1) = p(A_1 = n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}}$$

• $[X_n = n]$ est réalisé si on a eu n affectations ie lorsque chaque variable $A(j)$, $j \in [\![2, n]\!]$, est supérieure à $A(j-1)$

la seule permutation favorable est donc :

$$\begin{cases} A(1) = 1 \\ A(2) = 2 \\ \vdots \\ A(n) = n \end{cases}$$

et on a : $\boxed{p(X_n = n) = \frac{1}{n!}}$

- $X_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$

$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$; $P(X_2 = 2) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = 1 - P(X_2 = 1)$

- $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$

$P(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$; $P(X_3 = 3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

$P(X_3 = 2) = 1 - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c). $A_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ donc $([A_n = n], [A_n < n])$ forme un système complet d'événements de <u>probabilités non nulles</u> donc par la formule des probabilités totales, il vient pour <u>$n \geq 2$</u> et <u>$j \in [\![2, n]\!]$</u> :

$$P(X_n = j) = P(A_n = n)\, P_{(A_n = n)}(X_n = j) + P(A_n < n)\, P_{(A_n < n)}(X_n = j)$$

- or $P(A_n = n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{même raisonnt} \\ \text{qu'en 9)b)}}}{=} P(A_1 = n) = \underline{\frac{1}{n}}$

et $P(A_n < n) = 1 - P(A_n = n) = \boxed{\frac{n-1}{n}}$

- De plus, si $[A_n = n]$ est réalisé alors la n^e composante de $(A(1), \dots, A(n))$ est la plus grande donc au terme tour de la boucle $k = 2:n$, il y aura une dernière affectation pour c. Donc si $(A_n = n)$ est réalisé, la probabilité que X_n prenne la valeur j est égale à la probabilité que lors des $n-2$ premiers tours de boucle $(k = 2:n-1)$ il y a eu $j-1$ affectations pour c.

On peut donc conclure :

$$\boxed{P_{(A_n=n)}(X_n=j) = P(X_{n-1}=j-1)}$$

- Enfin, si $(A_n < n]$ est réalisé, alors le script est conçu de telle sorte que $A(n-1)$ est nécessairement la valeur la plus élevée des $A(1), \dots, A(n-1)$ et donc $A(n-1) = n$ (puisque cela ne peut pas être $A(n)$)

Ainsi, si $(A_n < n)$ est réalisé, il n'y aura pas de nouvelles affectations pour c lors du dernier tour de boucle. Ainsi le nombre d'affectations de c lors des $n-2$ premiers tours de boucle sera identique à celui des $n-1$ tours de boucle si $(A_n < n)$ est réalisé. On peut conclure :

$$P_{(A_n<n)}(X_n = j) = P(X_{n-1} = j)$$

<u>Bilan</u> :

$$\forall n \geq 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ P(X_n=j) = \frac{1}{n} P(X_{n-1}=j-1) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1}=j)$$

d) ok calcul sans intérêt ...

10) a) pour $j=1$: $\begin{cases} P(X_n=1) = \frac{1}{n} \\ P(X_{n-1}=0) = 0 \\ P(X_{n-1}=1) = \frac{1}{n-1} \end{cases}$

Donc $\frac{1}{n} P(X_{n-1}=0) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1}=1) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$

$= P(X_n=1)$ CQFD !

b) Soit $n \geq 2$.
on somme relation du 9)c) pour $j \in \underline{[\![2, n]\!]}$, en ayant multiplier par t^j au préalable, pour $t \in \mathbb{R}$:

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=2}^{n} P(X_n=j) t^j = \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{1}{n} P(X_{n-1}=j-1) t^j + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1}=j) t^j \right]$

$= \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} P(X_{n-1}=j-1) t^j + \frac{n-1}{n} \sum_{j=2}^{n} P(X_{n-1}=j) t^j$ ← dernier terme $=0$ car $X_{n-1}(\Omega) = \underline{[\![0, n-1]\!]}$

$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1}=j) t^{j+1} + \frac{n-1}{n} \sum_{j=2}^{n-1} P(X_{n-1}=j) t^j$

$= \frac{t}{n} G_{n-1}(t) + \frac{n-1}{n} \left[\sum_{j=1}^{n-1} P(X_{n-1}=j) t^j - P(X_{n-1}=1) \right]$

$= \frac{t}{n} G_{n-1}(t) + \frac{n-1}{n} G_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n} \underbrace{P(X_{n-1}=1)}_{=\frac{1}{n-1}}$

Donc :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\underbrace{\frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1}}_{\text{1 terme de } G_n(t)} + \sum_{j=2}^{n} P(X_n=j) t^j = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t)$

on conclut : $\forall n \geq 2$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t)}$

10) c) OK récurrence easy ... à faire !

11) les fonctions en présence sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc :

$\forall n \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n'(t) = \frac{1}{n} G_{n-1}(t) + \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}'(t)$

et pour $t = 1$, d'après 1)+2), on a :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad E_n = \frac{1}{n} + E_{n-1}}$$

- $\forall k \geq 2 \quad E_k - E_{k-1} = \frac{1}{k}$ on somme pour $k = 2$ à $k = n$ avec $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=2}^{n} E_k - E_{k-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$ on télescope !

$$E_n - E_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$ et comme $E_1 = P(X_1 = 1) = 1$

on conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad E_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = U_n$

⚠ la relation est encore vraie pour $n = 1$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E_n = U_n}$$

12) a) les fonctions en présence sont toujours dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall n \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n''(t) = \frac{1}{n} G_{n-1}'(t) + \frac{1}{n} G_{n-1}'(t) + \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}''(t)$$

$$= \frac{2}{n} G_{n-1}'(t) + \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}''(t)$$

et pour $t=1$:

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad G_n''(1) = \frac{2}{n} G_{n-1}'(1) + G_{n-1}''(1)}$$

D'après 3), $\forall n \geq 2$,

$$V_n - V_{n-1} = G_n''(1) + \underbrace{G_n'(1)}_{=U_n} - (G_n'(1))^2 - \left[G_{n-1}''(1) + G_{n-1}'(1) - (G_{n-1}'(1))^2\right]$$

$$= \underbrace{G_n''(1) - G_{n-1}''(1)} + U_n - U_n^2 - U_{n-1} + (U_{n-1})^2$$

$$= \frac{2}{n} G_{n-1}'(1) + U_n - U_{n-1} + U_{n-1}^2 - U_n^2$$

$$= \frac{2}{n} U_{n-1} + \underbrace{U_{n-1}^2 - U_n^2}_{\text{identité remarquable}} + \underbrace{(U_n - U_{n-1})}_{=\frac{1}{n}} \quad \text{(télescopage)}$$

$$= \frac{2}{n} U_{n-1} + (U_{n-1} + U_n)(U_{n-1} - U_n) + \frac{1}{n} \quad \left(\text{on rq } U_n = U_{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n} U_{n-1} + \left(U_{n-1} + U_{n-1} + \frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2}{n} U_{n-1} + \left(2U_{n-1} + \frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2}{n} U_{n-1} - \frac{2}{n} U_{n-1} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

on conclut magnifiquement :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

b) on somme encore le (2)a) pour $k = 2$ à n, $n \geq 2$:

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} (V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$$ on télescope

$$\forall n \geq 2, \quad V_n - \underbrace{V_1}_{=0} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{1^2}\right)$$

car $X_1 = 1$

on conclut : $\boxed{\forall n \geq 2, \quad V_n = U_n - h_n}$

la relation est encore vraie pour $n = 1$ ...

c) (ça ressemble à HEC 2000 E2 !)

. Montrons que $U_n - h_n \underset{n \to +\infty}{\sim} U_n$

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{U_n - h_n}{U_n} = 1 - \frac{h_n}{U_n}$$ or $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} h_n = \ell \in \mathbb{R} \text{ (car } (h_n) \text{ cv)} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty \text{ (série de Riemann divergente)} \end{cases}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{h_n}{U_n} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n - h_n}{U_n} = 1$ ie $U_n - h_n \underset{n \to +\infty}{\sim} U_n$

or $U_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ donc $U_n - h_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$

on conclut : $\boxed{V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n}$