ESSEC 2019 ECS

Eléments de correction

Exercice 1 :

Remarque : dans Q 1)c) on voit rank $(A - I_3)$
rank $(A - 2I_3)$

Donc on tenne que $Sp(A) = \{1, 2\}$ ...
Donc le polynôme annulateur devrait être $(X-1)(X-2) = X^2 - 2X - X + 2 = X^2 - 3X + 2$

1)a) Calcul : on cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,/\, aA^2 + bA + cI = 0$

Normal^t, on trouve $\boxed{a = 1,\ b = -3,\ c = 2}$

b) $(X-1)(X-2)$ polynôme annulateur de A donc :

$$\boxed{Sp(A) \subset \{1, 2\}}$$

c) $r_1 = \text{rang}(A - I_3) = \dim \text{Im}(f - Id) = 1$

Donc $\dim \text{Ker}(f - Id) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Im}(f - Id)$

ie $\dim \text{Ker}(f - Id) = 2$

1 est donc valeur propre de f et $\dim E_1(f) = 2$

De m̂, 2 est valeur propre de f et $\dim E_2(f) = 1$

2)a) • $\dim E_1(f) + \dim E_2(f) = \dim \mathbb{R}^3$

Donc f est diagonalisable et $E_1(f) \oplus E_2(f) = \mathbb{R}^3$

Par concaténation de (u_1, v_1) base de $E_1(f)$ et (v_2) base de $E_2(f)$, (u_1, v_1, v_2) forme 1 base de $\mathbb{R}^3$...

Pour exprimer u_1 et v_1 → calcul simple...

b) <u>Rappel</u> : P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

M1 X la matrice de x ds $\mathcal{B}$

X' ——————— $\mathcal{B}'$

alors $X = P X'$

et $X' = P^{-1} X$

Ici en notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}' = (u_1, v_1, v_2)$ base de vecteurs propres

P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ matrice de x dans $\mathcal{B}$

$X' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ——————— $\mathcal{B}'$

on cherche X' et on a $X' = P^{-1} X$

<u>M2</u> on résout 1 système $x = a e_1 + b e_2 + c e_3 = \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma v_2$

Partie 2

3) a) (Brouillon pr comprendre :

Si $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & & d_3 \end{pmatrix}$

alors $(D - d_1 I_3)(D - d_2 I_3)(D - d_3 I_3)$

$$= \begin{pmatrix} d_1 - d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 - d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 - d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 - d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 - d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 - d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 - d_3 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 - d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 - d_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 - d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 - d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 - d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 - d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 - d_3 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 - d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad)$$

Cas général $n \geq 1$ avec des "paritiés"

on suppose $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & (0) & \\ & & d_1 & & & & & & \\ & & & d_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & d_2 & & & \\ & (0) & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & d_p & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & d_p \end{pmatrix}$

on montre alors que $(D - d_1 I_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 0 & & & \\ & & & d_2 - d_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & d_p - d_1 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & d_p - d_1 \end{pmatrix}$

Donc $(D - d_1 I_n)(D - d_2 I_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & (d_3 - d_1)(d_3 - d_2) \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & (d_3 - d_1)(d_3 - d_2) \\ & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 0 & & & \\ & & & (d_3 - d_1)(d_3 - d_2) & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & (d_p - d_1)(d_p - d_2) \end{pmatrix}$

et par conjecture

$$\boxed{(D - d_1 I_n) \dots (D - d_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$$

<u>M2</u> par le produit matriciel → très très lourd pour un sujet EDHEC, à éviter ici...

b) $D = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f$ donc

$$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n) \dots (D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{(f - \lambda_1 Id) \circ (f - \lambda_2 Id) \circ \dots \circ (f - \lambda_p Id) = 0_{\mathcal{L}(E)}}}$$

on conclut : $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de f

4) on reconnaît <u>polynôme de Lagrange</u> → PAR COEUR !

a) Soit $k \in [\![1, p]\!]$

. $\underline{i = k}$ $\quad L_k(\lambda_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{\lambda_k - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j} = 1$

$\forall i \in [\![1, p]\!] \setminus \{k\}$, $L_k(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j} = \overbrace{\frac{\lambda_i - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}}^{=0} \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k \\ j \neq i}}^{p} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$

$= 0$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, p]\!], \forall i \in [\![1, p]\!], \quad L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}}$$

b) • Mq $(L_1, \dots, L_p)$ vecteurs de $\mathbb{R}_{p-1}(X)$

$\forall k \in [\![1,p]\!]$
$\forall j \in [\![1,p]\!] \setminus \{k\}$ $\deg\left(\dfrac{X - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j}\right) = 1$

Donc, par produit de $p-1$ polynômes de degré 1 :

$\forall k \in [\![1,p]\!]$ $\deg L_k = p-1$ et donc :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,p]\!] \quad L_k \in \mathbb{R}_{p-1}(X)} \quad (1)$$

• Mq $(L_1, \dots, L_p)$ libre

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ / $\alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_p L_p = 0$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!] \quad \sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k(\alpha_i) = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!] \quad \alpha_i \underbrace{L_i(\alpha_i)}_{=1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \alpha_k \underbrace{L_k(\alpha_i)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall i \in [\![1,p]\!] \quad \alpha_i = 0}$$

Donc $(L_1, \dots, L_p)$ libre (2)

• Ainsi $\begin{cases} (1) \\ (2) \\ \dim \mathbb{R}_{p-1}(X) = p = \operatorname{card}(L_1, \dots, L_p) \end{cases}$

Donc $\boxed{(L_1, \dots, L_p) \text{ base de } \mathbb{R}_{p-1}(X)}$

Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}(X)$

c) $(L_1, \dots, L_p)$ base de $\mathbb{R}_{p-1}(X)$ donc :

$\exists ! (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \quad P = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!] \quad P(\lambda_i) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k(\lambda_i) = \alpha_i L_i(\lambda_i) = \alpha_i$

Ainsi $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}(X), \quad P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k}$

d) Posons P_1 le polynôme constant égal à 1. $P_1 \in \mathbb{R}_{p-1}(X)$

D'après 4) c), $P_1 = \sum_{k=1}^{p} P_1(\lambda_k) L_k = 1$

et comme $\forall x \in \mathbb{R}, P_1(x) = 1$

on a $\forall k \in [\![1, p]\!] \quad P_1(\lambda_k) = 1$

et finalement $P_1 = \sum_{k=1}^{p} L_k$

ie $\boxed{\sum_{k=1}^{p} L_k = 1}$

5) a) Soit $x \in E$. Soit $k \in [\![1,p]\!]$.

$$L_k(f)(x) = \left[\bigcirc_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}(f-\lambda_j Id)\right](x)$$

$$= \left[\frac{1}{\lambda_k-\lambda_1}(f-\lambda_1 Id)\right]\circ\left[\frac{1}{\lambda_k-\lambda_2}(f-\lambda_2 Id)\right]\circ\cdots\circ\left[\frac{1}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}(f-\lambda_{k-1} Id)\right]$$

$$\circ\left[\frac{1}{\lambda_k-\lambda_{k+1}}(f-\lambda_{k+1} Id)\right]\circ\cdots\circ\left[\frac{1}{\lambda_k-\lambda_p}(f-\lambda_p Id)\right](x)$$

⚠ or $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ $(f-\lambda_i Id)\circ(f-\lambda_j Id)$

$$= (f-\lambda_j Id)\circ(f-\lambda_i Id)$$

et on est en présence d'applications linéaires donc :

$$\left[(f-\lambda_k Id)\circ L_k(f)\right](x) = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\lambda_k-\lambda_j} \times \underbrace{(f-\lambda_1 Id)\circ\cdots\circ(f-\lambda_p Id)}_{=0 \text{ d'après } 3)b)}$$

Donc $\boxed{L_k(f)(x) \in \operatorname{Ker}(f-\lambda_k Id)}$

b) Soit $x \in E$. on cherche $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} \ker(f - \lambda_k Id)$

tel que $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$.

or d'après 4)d) $\sum_{i=1}^{p} L_i = 1$ donc $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{p} L_i(f) = Id}}$

et donc $\forall z \in E$ $\sum_{i=1}^{p} L_i(f)(z) = z$

pour $z = x$, il vient $\sum_{i=1}^{p} L_i(f)(x) = x$

ie $x = L_1(f)(x) + L_2(f)(x) + \dots + L_p(f)(x)$

et comme d'après 5)a) $\forall k \in [\![1, p]\!]$ $L_k(f)(x) \in \ker(f - \lambda_k Id)$

on peut conclure :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in E \ \exists! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} \ker(f - \lambda_k Id) \quad x = x_1 + \dots + x_p \\ \qquad \text{avec } \forall i \in [\![1, p]\!] \quad x_i = L_i(f)(x) \end{array}}$$

c) calcul à vérifier !