Exercice 3 EDHEC 2019 ECS

Partie 1

1)a) Supposons $u^*$ existe. Soit $y \in E$

Rappel : si $(e_1, \dots, e_n)$ bon de $E$

alors $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

$u^* \in \mathcal{L}(E)$ donc $u^*(y) \in E$ et $\hat{C}$ $(e_1, \dots, e_n)$ bon de $E$ :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u^*(y), e_i \rangle e_i \underset{\text{symétrie du p.s}}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u^*(y) \rangle e_i$$

or par définition de $u^*$, $\langle e_i, u^*(y) \rangle = \langle u(e_i), y \rangle$

Donc on conclut, pour tout $y \in E$ :

$$\boxed{u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle e_i}$$

b) Supposons qu'il existe $u^*$ et $v^*$ vérifiant la relation
(Mq $u^* = v^*$ ie $\forall y \in E$ $u^*(y) = v^*(y)$)

Soit $y \in E$. On a d'après 1)a)

$$v^*(y) = u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle e_i$$

Ainsi $\forall y \in E$ $v^*(y) = u^*(y)$

ie $v^* = u^*$

Bilan : $\boxed{\text{Si } u^* \text{ existe, alors } u^* \text{ est unique}}$

2)a) . $\forall y \in E$ $u^*(y) \in E$ (existence)

donc $u^*$ est une application de $E$ dans $E$ (1)

. par bilinéarité du P.S, on montre aisément $u^*$ linéaire (2)

(1 & 2) : $\boxed{u^* \text{ est un endomorphisme de } E}$

b) on a finalement prouvé ici par analyse-synthèse !

faisons ici la synthèse.

Soit $u^* : \begin{cases} E \to E \\ y \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle e_i \end{cases}$

$u^* \in \mathcal{L}(E)$ et on a, pour $(x,y) \in E^2$

$\langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle e_i \rangle$ et bilinéarité du P.S

$= \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle \langle x, e_i \rangle$

or, comme $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$, on a :

$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle u(e_i)$ (linéarité de $u$)

et $\langle u(x), y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle u(e_i), y \rangle$ et par bilinéarité du PS

$= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle u(e_i), y \rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle \langle x, e_i \rangle$

on a bien : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle}$ CQFD !

Partie 2

3) Rappel : $f$ endo symétrique de $E$

Si $\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$

ici $\boxed{f^* = f \text{ et on a bien } f \circ f^* = f \circ f = f^* \circ f}$

4) a) Soit $x \in E$. Par définition de l'adjoint (avec $y = u(x)$ ...)

- $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^*(u(x)) \rangle$

$= \langle x, u^* \circ u(x) \rangle$ et $u$ normal donc :

$= \langle x, u \circ u^*(x) \rangle$ et par symétrie PS

$= \langle u \circ u^*(x), x \rangle$

$= \langle u(u^*(x)), x \rangle$ on réutilise la relat°

$= \langle u^*(x), u^*(x) \rangle$ on reconnaît $\|u^*(x)\|^2$.

Final : $\forall x \in E \quad \|u(x)\|^2 = \|u^*(x)\|^2$

Soit encore, en passant à la racine carré :

$\boxed{\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|u^*(x)\|}$

b) Mq $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$

Soit $x \in E$. on a :

$x \in \mathrm{Ker}\, u \iff u(x) = 0 \iff \|u(x)\| = 0$ et d'après 4)a)

$\iff \|u^*(x)\| = 0$

$\iff u^*(x) = 0$

$\iff x \in \mathrm{Ker}(u^*)$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)}$

5). Sol F sev de E stable par u

ie $\forall x \in F,\ u(x) \in F$

Mq $F^\perp$ stable par $u^*$ ie mq $\forall x \in F^\perp,\ u^*(x) \in F^\perp$

Soit $x \in F^\perp$. Alors $\forall y \in F,\ \langle x, y \rangle = 0$

Soit $y \in F$. $\langle u^*(x), y \rangle = \langle y, u^*(x) \rangle$ (sym)

$= \langle u(y), x \rangle$

or $y \in F$ et F stable par u donc $u(y) \in F$

et comme $x \in F^\perp$, $\langle u(y), x \rangle = 0$

ie $\langle u^*(x), y \rangle = 0$ Ceci est valable pour tout $y \in F$

Donc $\forall y \in F,\ \langle u^*(x), y \rangle = 0$

D'où $u^*(x) \in F^\perp$. Bilan : $\boxed{F^\perp \text{ stable par } u^*}$

6) a) Soit $x \in E_\lambda$

alors $u(x) = \lambda x$

(on veut mq $u^*(x) \in E_\lambda$ ie $u \circ u^*(x) = \lambda u^*(x)$)

on a $u(u^*(x)) = (u \circ u^*)(x) \underset{\substack{\uparrow \\ u \text{ normal}}}{=} (u^* \circ u)(x)$

$= u^*(u(x))$ or $u(x) = \lambda x$ donc

$= u^*(\lambda x)$ et $u^*$ linéaire donc

$= \lambda u^*(x)$

Ainsi $u^*(x) \in E_\lambda$ donc

$\boxed{E_\lambda \text{ est stable par } u^*}$

b) • Mq $(u^*)^* = u$ ie mq $u$ est l'adjoint de $u^*$.

on a : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u^*(x), y \rangle = \langle y, u^*(x) \rangle$ (sym)

$= \langle u(y), x \rangle$ car $u^*$ adjoint de $u$

$= \langle x, u(y) \rangle$ (symétrie)

Donc $u$ vérifie la relation définissant l'adjoint de $u^*$

Ainsi $u$ est l'adjoint de $u^*$, ie $\boxed{(u^*)^* = u}$

- D'après 6) a) $E_d$ est stable par $u^*$

De plus, $E_d$ sev de $E$ donc d'après 5) on a :

$E_d^\perp$ stable par $(u^*)^* = u$

<u>Bilan</u> : $\boxed{E_d^\perp \text{ est stable par } u}$