



Compte-rendu de séance

MARDI 30 AVRIL 2019 ⌚ 13:12 ⌚ 1H23

Mathématiques - EML 2019 ECE analyse par Olivier

RÉUNION

Responsable de la séance

Olivier SARFATI - PROF

PROFESSEUR

Exemplaire de Julie
ADMINISTRATEUR -
ADMINISTRATEUR

Publié le 06/05/2019



Page	Libellé
4	Document EML 2019 ECE Scanné top.pdf (00:00:51)
10	Document Corrigé EM Lyon 2019 ECE.pdf (00:01:03)



Participants	Présence totale	Présence partielle	Absence
0	0	0	0

Calcul des présences : Les étudiants sont considérés comme totalement présents s'ils se sont connectés à la salle de classe dans les 5 premières minutes après le début initialement programmé et sont restés jusqu'à la fin programmée de la séance (pendant les 3 dernières minutes). Les étudiants partiellement présents se sont connectés avec un retard qui dépassait les 5 premières minutes ou ont quitté la salle de classe plus tôt que 3 minutes avant la fin programmée. Les étudiants absents ne se sont jamais connectés à la salle de classe.



J. 19 1204



Code sujet : 296

Conception : emlyon business school

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril 2019, de 14h00 à 18 h00.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

1/7

Tournez la page S.V.P.



EXERCICE 1

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

PARTIE A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V .

On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty; 0[$ et continues sur $[0; +\infty[$.

1. a. Justifier : $\forall t \in [0; +\infty[, 0 \leq F_U(t) f_V(t) \leq f_V(t)$.
- b. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt$ converge.

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt = \mathbf{P}([U \leq V]) = 1 - \mathbf{P}(U > V)$$

2. En déduire : $\mathbf{P}([U > V]) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t)) f_V(t) dt$.

$$\mathbf{P}(U > V) = 1 - \mathbf{P}(U \leq V)$$

3. **Exemple** : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ .

a. Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

- b. En déduire : $\mathbf{P}([U > V]) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

PARTIE B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On considère une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ .

On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leq T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \dots, T_n)$.

- a. Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $\mathbf{P}([M_n > t])$.
- b. En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
Reconnaître la loi de M_n et préciser son(s) paramètre(s).

5. a. Montrer : $\mathbf{P}([N = 1]) = \mathbf{P}([T_1 \leq T_0]) = \frac{1}{2}$.

- b. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, [N > n] = [M_n > T_0]$. $\rightarrow$ double inclusion
En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbf{P}([N > n])$ en fonction de n .

- c. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbf{P}([N = n]) = \frac{1}{n(n+1)}$. $= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

- d. En déduire la valeur de $\mathbf{P}([N = 0])$.

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?



EXERCICE 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsque il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que : $B = P^{-1} A P$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

PARTIE A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Déterminer les valeurs propres de A .
Justifier que A est inversible et diagonalisable.
- Déterminer une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que : $A = P D P^{-1}$.
Expliciter la matrice D^{-1} .
- On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et $Q D Q$.
- En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

$$\begin{aligned} Q^2 &= I \\ Q^{2n} &= I^n = I \\ Q^{2n+1} &= Q \end{aligned}$$

PARTIE B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

- Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
- Vérifier que 1 est valeur propre de f et que (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associé.
 - Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.
 - Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

- Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
 - Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.
- En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.



PARTIE C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?

10. a. Calculer N^3 puis $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.

b. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3 , N et N^2 .

$$N^2 \neq 0, N^3 = 0$$

11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N .

a. Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.

$$g \circ g \neq 0_{(\mathbb{R}^3)}$$

b. Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$g \circ g \circ g = 0_{(\mathbb{R}^3)}$$

c. Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.

d. Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

12. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.



EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0; +\infty[, f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[2; +\infty[$.

On note $g : [2; +\infty[\rightarrow [1; +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1; +\infty[$.

3. a. Dresser le tableau de variations de g .

b. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2; +\infty[$.

c. Soit $y \in [2; +\infty[$.

En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0; +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y .

PARTIE B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe C^2 sur l'ouvert $U =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in U, h(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout (x, y) de U .

5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer :

$$(x, y) \text{ est un point critique de } h \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}.$$

6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a, b) .

7. a. Vérifier : $\forall (x, y) \in U, h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) \geq h(1, 1)?$

b. En déduire que h admet en (a, b) un minimum global sur U .

PARTIE C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(n u_n).$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.



9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n .

```

1 function u = suite(n)
2     u = 1
3     for k = .....
4         u = .....
5     end
6 endfunction

```

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$.

b. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

c. Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. a. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$.

b. Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

c. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2; 3]$.

d. Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

e. En déduire une fonction Scilab qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

• FIN •



ex 1

Correction succincte EML Lyon ECE 2019 (1)

Partie A

1) a) soit $t \in [0, +\infty[$ $0 \leq F_U(t) \leq 1$ car F_U fonction de répartition
 $f_V(t) \geq 0$ car f_V fonction de densité
 D'où $0 \cdot f_V(t) \leq F_U(t)f_V(t) \leq 1 \cdot f_V(t)$
 soit $0 \leq F_U(t)f_V(t) \leq f_V(t)$

b) la fonction $[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto F_U(t)f_V(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ en

tant que produit de fonctions continues et positive d'après 1.a.

On sait que $\int_0^{+\infty} f_V(t) dt$ converge et vaut 1 (f_V nulle sur $]-\infty, 0[$)

L'intégrale $\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt$ est impropre en $+\infty$

on $\forall t \in [0, +\infty[$ $0 \leq F_U(t)f_V(t) \leq f_V(t)$

Donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives $\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt$ converge

$$2) P(U > V) = 1 - P(U \leq V) = 1 - \int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt$$

$$\text{on } \int_0^{+\infty} f_V(t) dt = 1 \quad (\text{cf 1.b})$$

$$\text{donc } P(U > V) = \int_0^{+\infty} f_V(t) dt - \int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt$$

par linéarité des intégrales convergentes

$$P(U > V) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))f_V(t) dt$$

$$3) a) F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad f_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu e^{-\mu t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$b) \text{ soit } t \in [0, +\infty[\quad (1 - F_U(t))f_V(t) = \mu e^{-(\mu + \lambda)t}$$

$$\text{soit } A > 0 \quad \int_0^A (1 - F_U(t))f_V(t) dt = \mu \int_0^A e^{-(\mu + \lambda)t} dt$$

$$= \frac{\mu}{\mu + \lambda} (1 - e^{-(\mu + \lambda)A})$$

$$\text{on } \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-(\mu + \lambda)A} = 0 \quad \text{d'où } \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))f_V(t) dt = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$



Partie B 4 a) soit $t \in \mathbb{R}^+$ $[N_n > t] = \bigcap_{i=1}^n (T_i > t)$ (2)

Par indépendance des $(T_i)_{i \in [1, n]}$ $P([N_n > t]) = \prod_{i=1}^n P(T_i > t)$

comme les T_i ont même loi que T_1

$$P([N_n > t]) = P(T_1 > t)^n = (e^{-\lambda t})^n = e^{-n\lambda t}$$

$$b) \text{ si } t \in]0, +\infty[\quad P(N_n \leq t) = 0$$

$$\text{si } t \in [0, +\infty[\quad P(N_n \leq t) = 1 - P(N_n > t) = 1 - e^{-n\lambda t}$$

$$\text{d'où} \quad F_{N_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad N_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$$

5 a) $(N=1) = (T_1 \leq T_0)$ car 1 est le plus petit entier k tel que $T_k \leq T_0$
En reprenant le résultat de la question A.3. b on a :

$$P(T_1 > T_0) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où} \quad P(T_1 \leq T_0) = \frac{1}{2}$$

b) soit $m \in \mathbb{N}^*$ l'événement $[N > m]$ signifie que pour tout i appartenant à $[1, m]$ on a $T_i > T_0$ donc $\min_{i \in [1, m]} (T_i) > T_0$
(car nombre fini de va) d'où $[N > m] = [N_m > T_0]$

$$P([N > m]) = P([N_m > T_0]) = \frac{m\lambda}{m\lambda + \lambda} = \frac{m}{m+1} \quad (\text{utilise A.3. b})$$

$$\text{donc} \quad P([N > m]) = \frac{m}{m+1}$$

c) soit $m \in \mathbb{N}^* / \{1\}$ $[N > m-1] = [N > m] \cup [N = m]$
Par incompatibilité des événements $[N > m]$ et $[N = m]$

$$P([N = m]) = P([N > m-1]) - P([N > m])$$

$$P([N = m]) = \frac{m-1}{m} - \frac{m}{m+1} = \frac{(m+1)(m-1) - m^2}{m(m+1)} = \frac{1}{m(m+1)}$$

$$P(N=0) = 1 - P(N > 0) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [N=n]\right)$$



$$d) P([W=0]) = 1 - P([W=1]) - \sum_{n=2}^{+\infty} P([W=n]) \quad (3)$$

$$\text{or } \forall n \in \mathbb{N}^* / \{1\} \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{soit } k \geq 2 \quad \sum_{n=2}^k P([W=n]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} \quad \text{par télescopage}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} P([W=n]) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc} \quad \underline{P([W=0]) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0}$$

6) W admet une espérance si et seulement si la série de terme général

$\frac{n}{n(n+1)}$ est absolument convergente.

$$\text{or } \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

donc par théorème d'équivalence pour les séries positives, cette série diverge donc W n'admet pas d'espérance.



EM Lyon 2019

Exercice 2

Partie A

1. A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, à savoir $\frac{1}{2}, 1$ et 2 .

A n'admet pas 0 pour valeur propre, est donc inversible.

A admet trois valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension 3, elle est donc diagonalisable.

2. Recherchons les sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\frac{1}{2}, 1$ et 2 .

- on a $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$ d'où $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

- soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a

$$AX = \frac{1}{2}X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y \\ 2z = \frac{1}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $E_{\frac{1}{2}} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

- Pour la valeur propre 1, on a

$$AX = 1X \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = x \\ \frac{1}{2}y = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Par concaténation des familles libres issues des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, on obtient une famille libre de cardinal 3 de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, à savoir une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de v.e.p. Et on a alors, en rangeant les valeurs propres dans l'ordre croissant, $A = PDP^{-1}$ avec P matrice de passage inversible

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{par inversion d'une matrice diagonale.}$$

3. Calculons Q^2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } Q^2 = I \quad \Rightarrow \quad Q \cdot Q = I \quad \Rightarrow \quad Q \cdot Q^{-1} = I$$

calculons QDQ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{d'où } QDQ = D^{-1}$$

4. On en déduit, comme $Q^2 = I$ que Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = Q$.

La seconde formule donne ainsi

$$Q^{-1}DQ = D^{-1}$$

ce qui signifie que D et D^{-1} sont semblables.

Or A et D sont semblables, on en déduit que A^{-1} et D^{-1} le sont également.

D'où par transitivité A et A^{-1} sont semblables.

Partie B

5. On a M matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, (e₁, e₂, e₃)

Calculons

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, -1, 2)$$



d'où

$$M = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} / e_1 \\ / e_2 \\ / e_3 \end{matrix}$$

m2 : $MX=0 \Rightarrow \dots \Rightarrow X=0$

M est inversible si et seulement si $\text{rg } M = 3$. Or le rang de M est le rang de la famille constituée par ses vecteurs colonnes. Montrons que cette famille est libre. Supposons qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrons qu'alors $a = b = c = 0$.

On a $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

d'où la famille considérée est libre, $\text{rg } M = 3$ et M est inversible.

6. a. Montrons que 1 est valeur propre de f et cherchons le sous-espace propre associé.

Pour cela, résolvons l'équation $f(x, y, z) = 1(x, y, z)$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, i.e. $(x, -y, y+2z) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ -y = y \\ y+2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = y \\ y+2z = z \end{cases}$

m2 : $(M-I)X=0 \dots$

Les solutions s'écrivent $(x, y, -y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1) = x u_1 + y u_2$ avec u_1 et u_2 non nuls et non colinéaires, d'où

1 valeur propre de f et $E_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ de dimension 2.

b. Cherchons un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (x, y, z) + (0, 1, -1)$. Ainsi $(x, -y, y+2z) = (x, y, z) + (0, 1, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ -y = y+1 \\ y+2z = z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = y+1 \\ y+2z = z-1 \end{cases}$

En particulier, le vecteur $u_3 = (0, 0, -1)$ convient.

c. Montrons que la famille $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. C'est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de dimension 3. Il suffit ainsi de montrer que c'est une famille libre.

Supposons qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a u_1 + b u_2 + c u_3 = 0$. Montrons qu'alors $a = b = c = 0$.

On a $a(1, 0, 0) + b(0, 1, -1) + c(0, 0, -1) = (0, 0, 0)$
i.e. $(a, b, -b-c) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ -b-c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$.

La famille B_1 est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

7. a. La matrice M_1 de f dans B_1 s'écrit

$$M_1 = \begin{pmatrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} / u_1 \\ / u_2 \\ / u_3 \end{matrix}$$

La matrice M_2 de f dans B_2 s'écrit

$$M_2 = \begin{pmatrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} / u_1 \\ / -u_2 \\ / u_3 \end{matrix}$$

b. Les matrices M_1 et M_2 sont les matrices du même endomorphisme f dans deux bases différentes. Elles sont donc semblables.

Calculons $M_1 M_2^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad M_1 M_2^{-1} = I$$

8. On en déduit, comme $M_1 M_2^{-1} = I$ que M_1 est inversible d'inverse $M_1^{-1} = M_2$.

Or M_1 et M_2 sont semblables, ce qui signifie que M_1 et M_1^{-1} sont semblables.

Or M et M_1 sont semblables car elles représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes. Etant inversibles, on en déduit que M^{-1} et M_1^{-1} sont également semblables, d'où par transitivité M et M^{-1} sont semblables.



Partie C

9. T est une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls. Elle est donc inversible.

T étant triangulaire admet comme valeurs propres ses éléments diagonaux, à savoir 1. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice identité et serait ainsi la matrice identité, ce qui n'est pas le cas. T n'est donc pas diagonalisable.

10. a. On a $N = T \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et d'on a pour N^3

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad N^3 = 0_{\text{Mat}_3(\mathbb{R})}$$

On a $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3$
or, comme $N^3 = 0$

et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3$

b. soit $T(I_3 - N + N^2) = I_3$

ce qui confirme que T est inversible d'inverse $T^{-1} = I_3 - N + N^2$

11. a. On a vu en 10. a. que $N^2 \neq 0$ et que $N^3 = 0$

soit avec g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N , l'endomorphisme $g \circ g$ est non nul tandis que $g \circ g \circ g = 0$.

On en déduit que : $\exists u \in \mathbb{R}^3 / g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$

b. La famille $B_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que c'est une famille libre.

Supposons qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a g \circ g(u) + b g(u) + c u = 0$. Montrons que alors $a = b = c = 0$.

On a $a g \circ g(u) + b g(u) + c u = 0$.

En appliquant g à cette expression, on obtient par linéarité

$$g(a g \circ g(u) + b g(u) + c u) = g(0) = 0$$

$$a g \circ g \circ g(u) + b g \circ g(u) + c g(u) = 0$$

soit $b g \circ g(u) + c g(u) = 0$

En appliquant g à cette expression, on obtient de même

$$b g \circ g \circ g(u) + c g \circ g(u) = 0$$

soit $c g \circ g(u) = 0$

Or $g \circ g(u) \neq 0$ d'où $c = 0$.

L'expression précédente conduit à

Or $g \circ g(u) \neq 0$ d'où $b = 0$.

Enfin, la première expression conduit à

Or $g \circ g(u) \neq 0$ d'où $a = 0$.

La famille $B_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est donc une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de dimension 3, ie une base de $\mathbb{R}^3$.

c. La matrice de g dans la base B_3 s'écrit

$$g(g \circ g(u)) = g \circ g \circ g(u) = 0$$

$$g(g(u)) = g \circ g(u)$$

$$g(u) = g(u)$$

soit $M_{B_3}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} / g \circ g(u) \\ / g(u) \\ / u \end{matrix}$

d. Calculons $N^2 - N$.

On a $N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On reconnaît la matrice de g dans la base B_3 .

Les matrices N et $N^2 - N$ représentant le même endomorphisme g dans deux bases différentes sont donc semblables.

12. On on a $N = T \cdot I$ et $N^2 - N = T^{-1} \cdot I$. D'où $T \cdot I$ et $T^{-1} \cdot I$ sont semblables



ie il existe une matrice P de $M_3(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$T^{-1} - I = P^{-1}(T - I)P$$

$$\text{ie } T^{-1} - I = P^{-1}TP - P^{-1}IP$$

$$\text{soit } T^{-1} - I = P^{-1}TP - I$$

$$\text{ie } T^{-1} = P^{-1}TP$$

ce qui signifie que T et T^{-1} sont semblables.

c) 9) d'11 T diagonalisable - Alors

$$\exists P \quad T = P D P^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$= P I P^{-1} = P P^{-1} = I$$

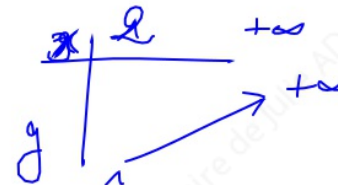
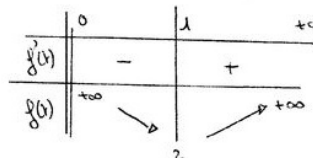
Absurde car $T \neq I$



(ex 3) Partie A 1) f est définie sur $]0, +\infty[$ et C^∞ sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions C^∞ $\forall t \in]0, +\infty[$

$$\begin{cases} f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2} \\ f''(t) = \frac{2}{t^3} \end{cases} \quad \forall t > 0 \quad f''(t) > 0 \quad \underline{f \text{ est convexe.}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = +\infty \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$$



2) f est convexe et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ car $\forall t > 1 \quad f'(t) > 0$ et f ne s'annule qu'en 1. Donc f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ à valeurs dans $[f(1), \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)[$ c'est à dire $[1, +\infty[$

3 a) g est strictement croissante de $[2, +\infty[$ à valeurs dans $[1, +\infty[$ par propriété d'une réciproque.

b) par propriété de la réciproque d'une fonction dérivable (f est C^1), g est dérivable en tous points où f ne s'annule pas (si f ne s'annule qu'en 1) donc g dérivable sur $]2, +\infty[$

c) soit $y \in]2, +\infty[$, $\exists ! t \in]1, +\infty[$ tel que $f(t) = y$ (et $t = g(y)$)

$$y = \frac{t^2 + 1}{t} \\ ty = t^2 + 1$$

$$\begin{cases} y = \frac{t^2 + 1}{t} \\ t \in]1, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - ty + 1 = 0 \quad \text{car } t > 0 \\ t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= y \\ g \circ f(t) &= g(y) \\ t &= g(y) \end{aligned}$$

On résout l'équation du second degré $t^2 - ty + 1 = 0$

$$\Delta = y^2 - 4 \quad \Delta > 0 \quad \text{car } y > 2$$

$$2 \text{ racines possibles : } t_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

Mais on doit avoir $t > 1$ ce que ne vérifie pas t_1

$$\text{En effet } t_1 = \frac{(y - \sqrt{y^2 - 4})(y + \sqrt{y^2 - 4})}{2(y + \sqrt{y^2 - 4})} = \frac{2}{y + \sqrt{y^2 - 4}} \quad \text{car } t_1 < 1 \text{ car } y > 2$$



d'où $t = g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$ (2)

Partie B a) h étant C^2 sur E ouvert, on peut calculer les dérivées partielles
soient $(x, y) \in U$ $\partial_x h(x, y) = (1+y) \left((1+x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = (1+y) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2} \right)$

par symétrie $\partial_y h(x, y) = (1+x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \right)$

5) (x, y) point critique $\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x h(x, y) = 0 \\ \partial_y h(x, y) = 0 \end{cases}$

(x, y) point critique $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{y^2} \end{cases}$ car $1+x=0$ n'a pas de solution sur $]0, +\infty[$, et
idem pour $1+y=0$

(x, y) point critique $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$

6) (x, y) point critique $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ et } y > 0 \\ y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$
car $x = x^4$ n'admet que 1 comme solution strictement positive.

h n'admet que $(1, 1)$ comme point critique.

7) @ soit $(x, y) \in U$ $f(x) + f(y) = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$

d'où $2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2 + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$h(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (1 + x + y + xy) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{y}{x} + y + \frac{1}{y} + 1 + \frac{x}{y} + x$

d'où $h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{y}{x}\right)$

b) . On a $h(1, 1) = 8$

. on voit que $\forall t > 0$ $f(t) \geq 2$ d'où $\forall (x, y) \in U$ $2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{y}{x}\right) \geq 8$

Donc $\forall (x, y) \in U$ $h(1, 1) \leq h(x, y)$ on a bien un minimum global sur U



Partie C : (8) On démontre par récurrence la propriété :

(3)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: " u_n existe et $u_n \geq 1$ "

Initialisation : u_1 existe et $u_1 \geq 1$

Hérédité : supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $P(n)$ soit vraie.

alors $\frac{1}{n^2 u_n}$ est défini car $u_n > 0$ donc u_{n+1} existe.

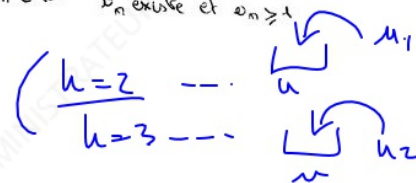
$$\text{de plus } u_n + \frac{1}{n^2 u_n} \geq u_n \quad \text{car } \frac{1}{n^2 u_n} > 0$$

$$\text{d'où } u_{n+1} \geq u_n \geq 1 \quad \text{donc } u_{n+1} \geq 1$$

donc $P(n+1)$ vraie

Conclusion : par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ u_n existe et $u_n \geq 1$

(9) fonction $u = \text{suite}(n)$
 $u = 1$
 for $k = 2 : n$
 $u = u + 1/(n^2 * k)$
 end
 end fonction.



(10) a) soit $n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = \frac{1}{n^2 u_n}$
 or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \geq 1$ donc $\frac{1}{u_n} \leq 1$ et $\frac{1}{n^2 u_n} \leq \frac{1}{n^2}$
 et $\frac{1}{n^2 u_n} > 0$
 d'où $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$

b) la série de terme général v_n est positive et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n \leq \frac{1}{n^2}$
 Or la série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge donc par théorème de

comparaison pour les séries à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge.

c) soit $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1 = u_n - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k = u_n - 1$$



La série $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ converge donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sigma_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ (4)

or $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge comme somme d'une constante et d'une suite convergente. et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$

1) a) soit $p \geq 2 \quad \forall t \in [k-1, k] \quad \frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{k^2}$ par décroissance de la fonction $[k-1, k] \rightarrow \mathbb{R}$

on peut intégrer cette inégalité entre $k-1$ et k et les bornes de $\frac{1}{t^2}$ et l'intégrale étant dans l'ordre croissant on a

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$$

$$b) \sum_{k=p}^{n-1} \sigma_k = \sum_{k=p}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_p$$

on sait que la série de terme général σ_k est à termes positifs donc $\sum_{k=p}^{n-1} \sigma_k \geq 0$ d'où $u_n - u_p \geq 0$

$$d'autre part \sum_{k=p}^{n-1} \sigma_k \leq \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$$

on peut Charles

$$\sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} = \int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2}$$

$$d'où \sum_{k=p}^{n-1} \sigma_k \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2}$$

$$donc 0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2}$$

$$\int_{p-1}^p + \int_p^{p+1} + \dots + \int_{n-2}^{n-1}$$

Rappel: Archimède (Charles)

$$\sum_{k=a}^b \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_a^{b+1} f(t) dt$$



c) $0 \leq u_n - u_2 \leq \int_1^{n-1} \frac{dt}{t^2}$ en appliquant 11.b à $p=2$ (5)

d'où $u_2 \leq u_n \leq u_2 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{n-1}$

soit $u_2 \leq u_n \leq u_2 + 1 - \frac{1}{n-1} \leq u_2 + 1$ car $-\frac{1}{n-1} \leq 0$

d'où $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$

$u_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$ donc $\forall n \geq 2, 2 \leq u_n \leq 3$

le passage à la limite conservent les inégalités $2 \leq l \leq 3$

d) $\forall p \geq 2, \forall n \geq p, 0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2}$

on $\int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$

d'où $\int_{p-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{p-1}$

donc $\forall n \geq p, 0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1}$

par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ $0 \leq l - u_p \leq \frac{1}{p-1}$

e) cherchons p tel que $\frac{1}{p-1}$ soit "égal" à 10^{-4}

on prend $p = 10^4 + 1$

alors pour cette valeur de p , on aura $0 \leq l - u_p \leq 10^{-4}$

il suffit donc de calculer ensuite suite $(10^4 + 1)$

en utilisant la fonction suite de (3)



Rappel : si F f° de répartition,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F(x) \leq 1$$

car $F(x)$ est une probabilité...

$$F(x) = P(X \leq x) \dots$$

Rappel : pr. mg 2 év^t A et B sont éjoux,

$$\text{on mg } \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

Pr. mg $A \subset B$, on mg A réalisé
 $\Rightarrow B$ réalisé

$$\text{S) b) } \text{mg } [M_n > T_0] \subset [N > n]$$

Donc $[M_n > T_0]$ réalisé - Alors

$$\min(T_1, \dots, T_n) > T_0$$

$$\text{or } \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad T_i \geq \min(T_1, \dots, T_n) > T_0$$



$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad T_i > T_0$$

Donc $[N > n]$ réalisé

CQFD

Requ: si $X(n) \in \mathbb{Z}$ alors
 $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$P(X = k) = \begin{cases} P(X \leq k) - P(X \leq k-1) \\ P(X < k+1) - P(X < k) \\ P(X \geq k) - P(X \geq k+1) \\ P(X > k-1) - P(X > k) \end{cases}$$

$$5). c) [N > n-1] = [N = n] \cup [N > n]$$

$$P(N > n-1) = P(N = n) + P(N > n)$$

$$\Rightarrow P(N = n) = P(N > n-1) - P(N > n)$$



Ex2

$$A) 4) Q^2 = I ; Q D Q = D^{-1}$$

$$\Rightarrow Q^{-1} D Q = D^{-1}$$

Donc D^{-1} et D semblables

$$A = P D P^{-1}$$

$$D = Q D^{-1} Q^{-1}$$

$$= P Q D^{-1} Q^{-1} P^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$= \underbrace{(PQ)}_R D^{-1} \underbrace{(Q^{-1}P^{-1})}_{R^{-1}}$$

A et D^{-1} semblables

Or D^{-1} et A^{-1} semblables

$$A = P D P^{-1}$$

$$A^{-1} = (P D P^{-1})^{-1} = ((P D) P^{-1})^{-1}$$

$$= (P^{-1})^{-1} (P D)^{-1} = P D^{-1} P^{-1}$$



On veut que A et A^{-1} soient semblables i.e

$$\exists H \in M_3(\mathbb{R}) \quad A = H A^{-1} H^{-1}$$

$$GL_3(\mathbb{R}) \quad A^{-1} = H^{-1} A H$$

$$A^{-1} = P D^{-1} P^{-1}$$

$$\text{or } A = R D^{-1} R^{-1}$$

$$\text{Donc } R^{-1} A R = D^{-1}$$

$$A^{-1} = P R^{-1} A R P^{-1}$$

$$= \underbrace{(P R^{-1})}_H A \underbrace{(P R^{-1})^{-1}}_{H^{-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{or } (P R^{-1})^{-1} &= (R^{-1})^{-1} P^{-1} \\ &= R P^{-1} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = H A H^{-1}$$

A^{-1} et A sont semblables...

6)b) on cherche $U_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tq

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \dots$$



Ex2 Q 11) b)

$$[a g \circ g(u) + b g(u) + c u = 0] (*)$$

appliquons $g \circ g$:

$$a g^4(u) + b g^3(u) + c g^2(u) = 0$$

$$\begin{pmatrix} g^2 = g \circ g \\ g \circ g \circ g = g^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{or } \begin{cases} g^3 = g^4 = 0 \\ g^2(u) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & c g^2(u) = 0 \\ & \quad \neq 0 \\ & \Rightarrow \boxed{c = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ (*) \quad a g \circ g(u) + b g(u) = 0 \end{cases}$$

appliquons g :

$$(*) \Rightarrow a \underbrace{g \circ g \circ g(u)}_{=0} + b \underbrace{g \circ g(u)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$\begin{cases} c = b = 0 \\ a g \circ g(u) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = b = c = 0}$$



f bijectif sur $\bar{I}$ à valeurs dans $\bar{J}$

$$\forall x \in \bar{I}, f \circ f^{-1}(x) = \text{id}(x)$$

Prop: $f \circ f^{-1}(x) = x$
 $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$

$$(f \circ f^{-1})'(x) = (f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x))$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$$

Si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ alors :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

