Compte-rendu de séance

MARDI 30 AVRIL 2019 10:28 2H31

Mathématiques - EML 2019 ECS - analyse par Olivier

RÉUNION

Responsable de la séance

Olivier SARFATI - PROF PROFESSEUR

Exemplaire de Julie ADMINISTRATEUR - ADMINISTRATEUR

Publié le 30/04/2019

Participants	Présence totale	Présence partielle	Absence
0	0	0	0

Calcul des présences : Les étudiants sont considérés comme totalement présents s'ils se sont connectés à la salle de classe dans les 5 premières minutes après le début initialement programmé et sont restés jusqu'à la fin programmée de la séance (pendant les 3 dernières minutes). Les étudiants partiellement présents se sont connectés avec un retard qui dépassait les 5 premières minutes ou ont quitté la salle de classe plus tôt que 3 minutes avant la fin programmée. Les étudiants absents ne se sont jamais connectés à la salle de classe.

J. 19 1203

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 295

Conception : emlyon business school

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril 2019, de 14h00 à 18h00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le sujet est constitué d'un unique problème composé de cinq parties, relativement indépendantes les unes des autres.

La partie A étudie des endomorphismes de polynômes. Cette partie est ***indépendante*** *du reste du problème.*

Les parties B, C et D étudient un opérateur fonctionnel. Certains résultats de la partie B seront utilisés dans les parties C et D.

Enfin, la partie E étudie un analogue discret de cet opérateur manipulant les notions de suites et de séries. Cette partie est aussi ***indépendante*** *du reste du problème.*

Tournez la page S.V.P.

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynomiales) à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique.

Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\quad \Psi_a(P) = 2P + (X-a)P'$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x (t-a)\,P(t)\,dt & \text{si } x \neq a, \\ \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Enfin on définit, pour tout k de $[\![0\,;n]\!]$, le polynôme Q_k par : $\quad Q_k = (X-a)^k$.

✓ **1.** Montrer que l'application $\Psi_a : P \longmapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

✓ **2.** Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

✓ **3.** **a.** Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

✓ **b.** Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

✓ **c.** Calculer, pour tout k de $[\![0\,;n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.

✓ **d.** En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a.

✓ **4.** **a.** Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\left((X-a)^2\,P(X)\right)'$ en fonction de $\Psi_a(P)$.

~ **b.** En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\quad \Phi_a(\Psi_a(P)) = P$.

✓ **c.** En déduire que $\Phi_a : P \longmapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.

✓ **d.** Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

40 min

2/7

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans la suite du problème, on fixe $a = 0$ et on prolonge l'application Φ_0 précédente à l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, que l'on note plus simplement Φ.

On considère f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la fonction $\Phi(f)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0, \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

5. On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$: $h(x) = \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

V a. Justifier que la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h'(x)$.

V b. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier qu'il existe deux réels α_x et β_x appartenant à $[0\,;x]$ tels que :

$$f(\alpha_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(\beta_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t.$$

V c. En déduire : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

oui V d. Montrer que l'on a aussi : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

6. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et que l'on a :

V

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad (\Phi(f))'(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - 2\Phi(f)(x)\big).$$

V 7. a. Montrer que, si f est une fonction paire (respectivement impaire), alors $\Phi(f)$ est encore une fonction paire (respectivement impaire).

V b. Montrer que, si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)$ est encore une fonction positive.

8. On admet le résultat suivant :

$$\text{si} \quad \lim_{+\infty} f = 0, \quad \text{alors} \quad \lim_{+\infty}\big(\Phi(f)\big) = 0.$$

oui V a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(g)$ où $g : x \longmapsto f(x) - \ell$, montrer :

$$\text{si} \quad \lim_{+\infty} f = \ell, \quad \text{alors} \quad \lim_{+\infty}\big(\Phi(f)\big) = \frac{\ell}{2}.$$

V b. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(h)$ où $h : x \longmapsto f(-x)$, montrer :

$$\text{si} \quad \lim_{-\infty} f = \ell, \quad \text{alors} \quad \lim_{-\infty}\big(\Phi(f)\big) = \frac{\ell}{2}.$$

1h22

PARTIE C : Une application en probabilité

Dans cette partie, on pourra utiliser des résultats de la partie B.

On considère F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On pose $G = 2\Phi(F)$; ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,F(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0, \\ F(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

9. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant G(x) \leqslant F(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{-*},\ 0 \leqslant F(x) \leqslant G(x)$.

10. Justifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et exprimer, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $G'(x)$ à l'aide de $x, F(x)$ et $G(x)$.

11. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} G'(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

    Montrer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire V puis que G est la fonction de répartition de V.

12. On définit la fonction h_1 sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

    a. Montrer que h_1 est une densité de probabilité.

    Soit X_1 une variable aléatoire admettant h_1 pour densité.

    b. Montrer que X_1 admet une espérance, notée $\mathrm{E}(X_1)$, et que l'on a : $\mathrm{E}(X_1) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

    c. On note H_1 la fonction de répartition de X_1 et on pose $H_2 = 2\Phi(H_1)$.

    Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

    D'après la question **11.**, H_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité que l'on note X_2. Déterminer une densité h_2 de X_2, puis montrer que X_2 admet une espérance (que l'on ne cherchera pas à calculer).

2h

4/7

PARTIE D : Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 \, dx$ converge.

Pour toute fonction f de E, on note toujours $\Phi(f)$ la fonction définie dans cette partie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x t\, f(t)\, dt & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

√ **13.** **a.** Justifier : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

√ **b.** En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E_2, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$ est absolument convergente.

14. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

√ On considère l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f,g) \in E_2 \times E_2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx.$$

15. Montrer que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_2.

√ On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

16. Soit f une fonction de E_2.

On note, comme dans la partie **B.**, pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $\quad h(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt$.

√ **a.** Calculer les limites de $x \longmapsto \dfrac{(h(x))^2}{x^4}$ et de $x \longmapsto \dfrac{(h(x))^2}{x^3}$ en 0.

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

√ $$\forall X > 0, \quad \int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4}\, dx = -\frac{1}{3}\frac{(h(X))^2}{X^3} + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\, \Phi(f)(x)\, dx.$$

c. Soit $X > 0$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale $\lambda \longmapsto \int_0^X \left(\lambda f(x) + \Phi(f)(x)\right)^2 dx$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^X f(x)\, \Phi(f)(x)\, dx \leqslant \left(\int_0^X (f(x))^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2\, dx\right)^{1/2}.$$

√ **d.** En déduire : $\quad \forall X > 0, \quad \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2\, dx\right)^{1/2} \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^X (f(x))^2\, dx\right)^{1/2}$.

√ **e.** Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que l'on a : $\quad \|\Phi(f)\| \leqslant \frac{2}{3}\|f\|$.

f. En utilisant la relation de la question **16.b**, justifier que la limite de $X \longmapsto X\,(\Phi(f)(X))^2$ en $+\infty$ est finie, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

√ **g.** En déduire : $\quad \|\Phi(f)\|^2 = \frac{2}{3}\langle \Phi(f), f \rangle$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE E : Étude d'une suite

Dans cette partie, indépendante des précédentes, on étudie un analogue discret de l'application Φ étudiée précédemment.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

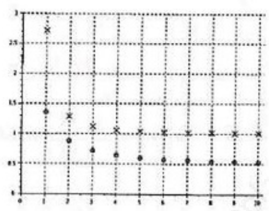
$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k\, u_k.$$

17. On suppose que l'on dispose d'une fonction Scilab d'en-tête `function u = suite_u(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de u_n.
En déduire une fonction Scilab d'en-tête `function v = suite_v(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de v_n.

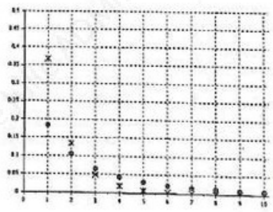
18. On suppose dans cette question uniquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

a. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

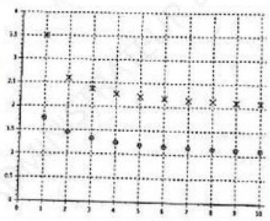
b. Pour différentes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissantes, on représente ci-dessous, à l'aide des fonctions `suite_u` et `suite_v`, les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole '×' et ceux de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole '⊕'.
À la vue des graphes suivants, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?



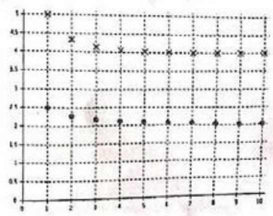
Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = e^{1/n^2}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = e^{-n}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{6n+1}{3n-1}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 4 + 5\,(0.9)^n$

3h

Orange F 4G 18:44 78 %

c. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad v_n \geqslant \frac{u_n}{2} \quad$ et $\quad v_{2n} \leqslant \frac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}$.

d. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad (n+2)\,v_{n+1} = n\,v_n + u_{n+1} \quad$ puis $\quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2\,v_{n+1})$.

e. Démontrer toutes les conjectures faites à la question 18.b.

19. On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

a. Montrer : $\quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k \; - \; N v_N$.

b. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

c. Montrer ensuite que $N v_N$ tend vers une limite finie lorsque l'entier N tend vers $+\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

d. En déduire : $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

20. On considère dans cette question une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

a. Justifier qu'il existe une variable aléatoire discrète Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{P}(Y = k).$$

b. On suppose dans cette question que Y admet une espérance, notée $\mathrm{E}(Y)$.

Montrer : $\quad \mathrm{P}(Z = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{E}(Y)}{n^2}$. $\quad$ La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

3h50

• FIN •

7/7

7/7

J. 19 1203

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 295

Conception : emlyon business school

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril 2019, de 14h00 à 18h00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le sujet est constitué d'un unique problème composé de cinq parties, relativement indépendantes les unes des autres.

La partie A étudie des endomorphismes de polynômes. Cette partie est ***indépendante*** *du reste du problème.*

Les parties B, C et D étudient un opérateur fonctionnel. Certains résultats de la partie B seront utilisés dans les parties C et D.

Enfin, la partie E étudie un analogue discret de cet opérateur manipulant les notions de suites et de séries. Cette partie est aussi ***indépendante*** *du reste du problème.*

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynomiales) à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique.

Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\Psi_a(P) = 2P + (X-a)\,P'$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x (t-a)\,P(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq a, \\ \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Enfin on définit, pour tout k de $[\![0\,;n]\!]$, le polynôme Q_k par : $Q_k = (X-a)^k$.

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \longmapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. a. Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
   b. Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   c. Calculer, pour tout k de $[\![0\,;n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.
   d. En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a.
4. a. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\left((X-a)^2\,P(X)\right)'$ en fonction de $\Psi_a(P)$.
   b. En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\Phi_a\big(\Psi_a(P)\big) = P$.
   c. En déduire que $\Phi_a : P \longmapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.
   d. Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

$\phi_a = \Psi_a^{-1}$

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans la suite du problème, on fixe $a = 0$ et on prolonge l'application Φ_0 précédente à l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, que l'on note plus simplement Φ.

On considère f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la fonction $\Phi(f)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0, \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

5. On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$: $h(x) = \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h'(x)$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier qu'il existe deux réels α_x et β_x appartenant à $[0\,;x]$ tels que :

$$f(\alpha_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(\beta_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t.$$

c. En déduire : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

d. Montrer que l'on a aussi : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

6. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad (\Phi(f))'(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - 2\Phi(f)(x)\big).$$

7. a. Montrer que, si f est une fonction paire (respectivement impaire), alors $\Phi(f)$ est encore une fonction paire (respectivement impaire).

b. Montrer que, si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)$ est encore une fonction positive.

8. On admet le résultat suivant :

$$\text{si } \lim_{+\infty} f = 0, \quad \text{alors } \lim_{+\infty} (\Phi(f)) = 0.$$

a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(g)$ où $g : x \longmapsto f(x) - \ell$, montrer :

$$\text{si } \lim_{+\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim_{+\infty} (\Phi(f)) = \frac{\ell}{2}.$$

b. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(h)$ où $h : x \longmapsto f(-x)$, montrer :

$$\text{si } \lim_{-\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim_{-\infty} (\Phi(f)) = \frac{\ell}{2}.$$

PARTIE C : Une application en probabilité

Dans cette partie, on pourra utiliser des résultats de la partie B.

On considère F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On pose $G = 2\Phi(F)$; ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,F(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0, \\ F(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

9. Montrer : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ 0 \leqslant G(x) \leqslant F(x) \quad$ et $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \ 0 \leqslant F(x) \leqslant G(x)$.

10. Justifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et exprimer, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $G'(x)$ à l'aide de x, $F(x)$ et $G(x)$.

11. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} G'(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire V puis que G est la fonction de répartition de V.

12. On définit la fonction h_1 sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

a. Montrer que h_1 est une densité de probabilité.

Soit X_1 une variable aléatoire admettant h_1 pour densité.

b. Montrer que X_1 admet une espérance, notée $\mathrm{E}(X_1)$, et que l'on a : $\quad \mathrm{E}(X_1) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c. On note H_1 la fonction de répartition de X_1 et on pose $H_2 = 2\,\Phi(H_1)$.

Montrer : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

D'après la question **11.**, H_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité que l'on note X_2. Déterminer une densité h_2 de X_2, puis montrer que X_2 admet une espérance (que l'on ne cherchera pas à calculer).

PARTIE D : Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x$ converge.

Pour toute fonction f de E, on note toujours $\Phi(f)$ la fonction définie dans cette partie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

13. **a.** Justifier : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

b. En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E_2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

14. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

On considère l'application $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f,g) \in E_2 \times E_2, \quad \langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

15. Montrer que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E_2.

On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

16. Soit f une fonction de E_2.

On note, comme dans la partie **B.**, pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $\quad h(x) = \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Calculer les limites de $x \longmapsto \dfrac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}$ et de $x \longmapsto \dfrac{\big(h(x)\big)^2}{x^3}$ en 0.

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall X > 0, \quad \int_0^X \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\,\frac{\big(h(X)\big)^2}{X^3} + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\,\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x.$$

c. Soit $X > 0$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale $\lambda \longmapsto \displaystyle\int_0^X \big(\lambda\, f(x) + \Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^X f(x)\,\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \Big(\int_0^X \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

d. En déduire : $\quad \forall X > 0, \quad \Big(\displaystyle\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \leqslant \dfrac{2}{3}\Big(\displaystyle\int_0^X \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$.

e. Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que l'on a : $\quad \|\Phi(f)\| \leqslant \dfrac{2}{3}\|f\|$.

f. En utilisant la relation de la question **16.b**, justifier que la limite de $X \longmapsto X\,\big(\Phi(f)(X)\big)^2$ en $+\infty$ est finie, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

g. En déduire : $\quad \|\Phi(f)\|^2 = \dfrac{2}{3}\langle\Phi(f), f\rangle$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE E : Étude d'une suite

*Dans cette partie, **indépendante des précédentes**, on étudie un analogue discret de l'application Φ étudiée précédemment.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

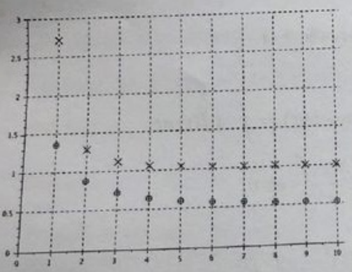
$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k.$$

17. On suppose que l'on dispose d'une fonction Scilab d'en-tête `function u = suite_u(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de u_n.
En déduire une fonction Scilab d'en-tête `function v = suite_v(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de v_n.

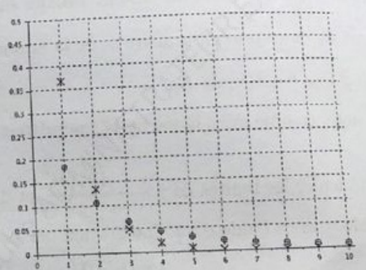
18. On suppose dans cette question uniquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

a. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

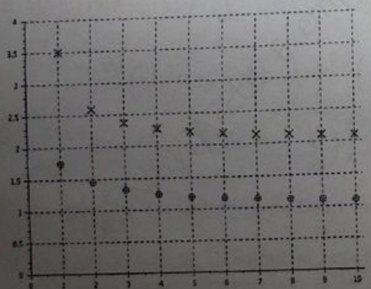
b. Pour différentes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissantes, on représente ci-dessous, à l'aide des fonctions `suite_u` et `suite_v`, les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole '×' et ceux de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole '⊕'.
À la vue des graphes suivants, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?



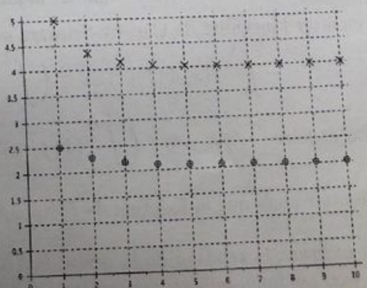
Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = e^{1/n^2}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = e^{-n}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{6n+1}{3n-1}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 4 + 5\,(0.9)^n$

6/7

Scanned with CamScanner

c. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad v_n \geqslant \dfrac{u_n}{2} \quad$ et $\quad v_{2n} \leqslant \dfrac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \dfrac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}$.

d. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad (n+2)\, v_{n+1} = n\, v_n + u_{n+1} \quad$ puis $\quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n}(u_{n+1} - 2\, v_{n+1})$.

e. Démontrer toutes les conjectures faites à la question **18.b**.

19. On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

a. Montrer : $\quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k \; - \; N v_N$.

b. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

c. Montrer ensuite que $N v_N$ tend vers une limite finie lorsque l'entier N tend vers $+\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

d. En déduire : $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

20. On considère dans cette question une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

a. Justifier qu'il existe une variable aléatoire discrète Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbf{P}(Y = k).$$

b. On suppose dans cette question que Y admet une espérance, notée $\mathbf{E}(Y)$.

Montrer : $\quad \mathbf{P}(Z = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{E}(Y)}{n^2}$. $\quad$ La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

• FIN •

PROBLEME DE SYNTHESE

ESSEC 2002 E3

Dans cet exercice, on désigne par p un nombre entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p.

1°) Etude d'un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}_p[X]$

a) On associe à toute fonction polynôme P la fonction $\widehat{P}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{P}(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \quad \text{si } x \neq 1 \quad \text{et} \quad \widehat{P}(1) = P(1).$$

- Montrer que la fonction $x \to \int_1^x P(t)dt$ est une fonction polynôme admettant 1 pour racine.
- Montrer que la fonction $\widehat{P}$ est une fonction polynôme de même degré que P lorsque $P \neq 0$.

b) On considère l'application ϕ associant à toute fonction polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_p[X]$ la fonction polynôme $\widehat{P}$ définie ci-dessus.
Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$. Est-il injectif ? surjectif ?

c) Déterminer les images par ϕ des fonctions polynômes $e_k : x \to x^k$ pour $0 \leq k \leq p$, puis en déduire la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$.

d) Quelles sont les valeurs propres de ϕ ? ϕ est-il diagonalisable ?

2°) Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

a) Déterminer les fonctions propres de ϕ associée à la valeur propre 1.

b) On considère une valeur propre λ de ϕ, et une fonction polynôme propre associée P.
Montrer que, pour tout nombre réel x :
$$(1-\lambda)P(x) = \lambda(x-1)P'(x).$$
En déduire, si $\lambda \neq 1$, que 1 est nécessairement racine de P.

c) Déterminer les images par ϕ des fonctions polynômes $P_k : x \to (x-1)^k$ pour $0 \leq k \leq p$ et montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

d) On considère une fonction polynôme P exprimée comme suit dans la base précédente :
$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \ldots + a_pP_p.$$
Montrer que $a_0 = P(1)$, calculer $\Phi_1 = \phi(P)$, $\Phi_2 = \phi \circ \phi(P)$, puis $\Phi_n = \phi^n(P)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer pour tout nombre réel x la limite de $\Phi_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$, et en déduire en particulier que, si $P(x) = x^p$, la limite de $\Phi_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$ est égale à 1.

3°) Application à une marche aléatoire

Un individu se déplace sur les points d'abscisse 0, 1, 2, … , p selon les règles suivantes :

- Il est au point d'abscisse p à l'instant 0.
- S'il est au point d'abscisse k ($0 \leq k \leq p$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il est de façon équiprobable en l'un des $k+1$ points d'abscisses 0, 1, … , k à l'instant $n+1$.

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n et par EX_n son espérance.

a) Exprimer à l'aide du théorème des probabilités totales la probabilité $P(X_{n+1} = k)$ où $0 \leq k \leq p$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, … , $P(X_n = p)$.

b) En déduire une matrice carrée M telle que $U_{n+1} = MU_n$ où U_n désigne la matrice-colonne dont les éléments sont du haut vers le bas $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, … , $P(X_n = p)$.

c) Exprimer le produit matriciel $[0\ \ 1\ \ 2\ \ \ldots\ \ p]M$ en fonction de $[0\ \ 1\ \ 2\ \ \ldots\ \ p]$.
En multipliant l'égalité $U_{n+1} = MU_n$ à gauche par la matrice-ligne $[0\ \ 1\ \ 2\ \ \ldots\ \ p]$, exprimer EX_{n+1} en fonction de EX_n, puis préciser EX_n en fonction de n ainsi que sa limite.

d) Préciser U_0, puis donner U_n en fonction de M et de n.
En déduire, à l'aide de la question 2.d que les $p+1$ composantes de U_n ont pour limites (de haut en bas) 1, 0, 0, … , 0 quand n tend vers $+\infty$, puis interpréter ce résultat.

ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION 1984

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve

Mardi 15 mai 1984 de 8h à 12h

Les parties III et IV, indépendantes entre elles, proposent deux autres démonstrations de la formule (3) de II-4-b.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur à 1, et l'on note, pour tout entier $p \leq n$, $I_p = \{0, 1, 2, \dots, p\}$.

Question préliminaire : $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I(a,b) = \int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx$

a) Déterminer, lorsque $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, une relation de récurrence entre $I(a,b)$ et $I(a+1, b-1)$. En déduire $I(a,b)$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

b) Utiliser le résultat précédent pour déterminer une expression simplifiée de la somme :

$$\sum_{j=0}^{b} (-1)^j \frac{C_b^j}{a+j+1} \quad . \qquad (0)$$

I. 1 $\mathbb{R}_n[X]$ désignant l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et du polynôme nul, montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists!\ Q \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \quad (1)$$

et que l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto Q \end{array}$ (Q défini par la relation (1))

est linéaire.

2 Montrer que f est bijective et définir l'application réciproque f^{-1}.

3 Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ ainsi que la matrice A^{-1} inverse de A. Ces matrices sont-elles diagona-

4 a - Soit α une racine complexe d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, d'ordre de multiplicité k. Est-elle racine du polynôme $f^{-1}(Q)$ et si oui, avec quel ordre de multiplicité (discuter en fonction des valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$) ?

b - En déduire les sous espaces propres de f^{-1} et montrer qu'ils sont également propres pour f.

c - Déterminer la matrice T triangulaire supérieure dont les coefficients de la diagonale principale sont égaux à 1 et la matrice D diagonale telles que :

$$D = T^{-1}AT$$

Déterminer la matrice T^{-1} inverse de T.

5 k désignant un entier naturel, f^k désignant l'application $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ si $k \geq 1$, et f^0 l'application identique, montrer que le coefficient de X^p, $p \in I_n$, du polynôme $f^k(X^n)$ est égal à :

$$C_n^p \left[\sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j C_{n-p}^j \frac{1}{(p+j+1)^k}\right]$$

II. On s'intéresse désormais à la suite d'épreuves définies de la façon suivante :

1. La 1ère épreuve consiste à "tirer" un nombre "au hasard" dans I_n.
2. Si le nombre p a été obtenu à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ($k \geq 1$), la $(k+1)^{\text{ème}}$ épreuve consiste à "tirer au hasard" un nombre dans I_p.

Compte-tenu des hypothèses 1 et 2, on conviendra que le nombre n est le résultat de la $0^{\text{ème}}$ épreuve.

. $(k,p) \in \mathbb{N} \times I_n$, on note $P_k(p)$ la probabilité d'obtenir le nombre p au $k^{\text{ème}}$ tirage, et U_k la matrice colonne $\begin{pmatrix} P_k(0) \\ P_k(1) \\ \vdots \\ P_k(n) \end{pmatrix}$

Enfin X_k désigne, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire : "nombre obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage".

.../...

P 228

(1) a - En remarquant que le resultat de la $(k+1)^{\text{ème}}$ épreuve est conditionné par celui de la $k^{\text{ème}}$, exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in I_n$, $P_{k+1}(p)$ en fonction des nombres $P_k(i)$, $i \in I_n$.

b - En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad U_{k+1} = AU_k \qquad (2)$

(2) a - Ecrire la matrice uniligne B telle que $BU_k = E(X_k)$ espérance mathématique de la variable aléatoire X_k, constater que le produit BA s'exprime simplement en fonction de B, et déduire de la relation (2), une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$. Calculer $E(X_k)$.

b - Procéder de façon analogue pour déterminer $E(X_k^2)$ $\left(\text{introduire la suite } \left(E(X_k^2) - \frac{n}{2^k}\right)_{k \in \mathbb{N}}\right)$. En déduire $V(X_k)$ variance de X_k.

(3) $k \in \mathbb{N}$, soit G_k le polynôme $G_k = \sum_{p=0}^{n} P_k(p) X^p$

Exprimer, à l'aide de l'application f définie au I, G_k en fonction de X^n.
En déduire $P_k(p)$, $(k,p) \in \mathbb{N} \times I_n$.

(4) a - Montrer que, si $p \in I_n - \{0\}$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} P_k(p)$ converge.

La série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} P_k(0)$ est-elle convergente ?

b - Utiliser le résultat (o) de la question préliminaire pour démontrer que :

$$\forall p \in I_n - \{0\} \quad \sum_{k=1}^{\infty} P_k(p) = \frac{1}{p} \qquad (3)$$

III. (1) En envisageant les différents résultats de la $k^{\text{ème}}$ épreuve, montrer que, si $p \in I_{n-1}$ et $k \in \mathbb{N}$, la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre p au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage est égale à $P_{k+1}(p+1)$.

(2) $p \in I_n$, on note $\alpha(p,n)$ la probabilité de tirer au moins une fois le nombre p lorsque les tirages "se prolongent indéfiniment", le 1er tirage s'effectuant dans I_n.

a - que vaut $\alpha(n,n)$?

b - démontrer, en tenant compte du résultat obtenu au 1er tirage que :

$$\forall p \in I_{n-1} \qquad (n+1)\,\alpha(p,n) = 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \alpha(p,k)$$

En déduire $\alpha(n-1,n)$.

c - $p \in I_{n-2}$, trouver une relation entre $\alpha(p,n)$ et $\alpha(p,n-1)$. En déduire $\alpha(p,n)$.

(3) Utiliser les résultats obtenus aux questions III.1 et III.2 pour retrouver la formule (3).

IV. (1) Soit $d : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto P' \end{array}$ (P' dérivée du polynôme P).

montrer que $d \circ f = f \circ d - f \circ d \circ f$ (considérer $f^{-1} \circ d \circ f$)

(2) Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N}^* \quad f \circ d = \sum_{k=1}^{q} d \circ f^k + f \circ d \circ f^q$

(3) Déduire du calcul de $(f \circ d)(X^n)$ que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad X^n = (X-1)\left(\sum_{k=1}^{q} G_k'\right) + G_q \qquad (4)$$

(4) Utiliser (4) pour retrouver la formule (3).

- P 229 -

Q1) easy

2) $(1, X, \dots, X^n)$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

$\varphi_a(1)$

$\varphi_a(X)$

$\vdots$

$\varphi_a(1) = 2$

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_a(X^k) = (k+2)X^k - ak\,X^{k-1}$

$$\begin{array}{cccccc} & \varphi_a(1) & \varphi_a(X) & \varphi_a(X^k) & \varphi_a(X^n) \\ \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a) = M = & \left(\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} -a \\ 3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ -ak \\ k+2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -an \\ n+2 \end{matrix}\right) \end{array}$$

3)a) φ_a admet $n+1$ vp (les él^{ts} diag) $\neq$:

$2, 3, \dots, (n+2)$

$Sp(\varphi_a) = \{ k,\ k \in [\![2, n+2]\!] \}$

$= \{ k+2,\ k \in [\![0, n]\!] \}$

$\hat{c}$ $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$

$\Rightarrow \varphi_a$ diagonalisable

3) b) $0 \notin Sp$ ...

3) c) $\varphi_a(Q_k) = (k+2) Q_k$

$Q_k \neq 0$, $\varphi_a(Q_k) = (k+2) Q_k$

$\Rightarrow Q_k$ vect propre associé de φ_a à vp $k+2$

or $\hat{c}$ $\begin{cases} \varphi_a \text{ admet } n+1 \text{ vp} \\ \dim \mathbb{R}_n(X) = n+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \dim E_{k+2}(\varphi_a) = 1$
$\forall k \in [\![0, n]\!]$

$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!] \quad E_{k+2}(\varphi_a) = \text{Vect}(Q_k)}$

4) c) $\forall P \quad \phi_a(\varphi_a(P)) = P = Id(P)$

$\Rightarrow \phi_a \circ \varphi_a = Id_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_n(X))}$

⚠ mq Φ_a endo ...

⚠ linéarité

Soit $(P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

. $\forall x \neq a \quad \Phi_a(\lambda P_1 + P_2)(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \dots$

. Pour $x = a$ ---

. Mq $\Phi_a : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$

Mq $\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \Phi_a(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

Mq $h : x \mapsto \int_a^x (t-a) P(t)\,dt$ est 1 f° polyn...
admet a pour racine double !!!

$h(a) = \int_a^a \dots = 0 \longrightarrow a$ racine de h

$P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\exists (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,
$P = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_a^x (t-a)P(t)\,dt = \int_a^x (t-a)\sum_{k=0}^{n} b_k t^k \,dt$

$= \sum_{k=0}^{n} b_k \int_a^x \underbrace{(t-a)t^k}\,dt$

$\vdots$

$= \sum_{k=0}^{n} \cdots \dfrac{x^{k+2}}{k+2} - \dfrac{a x^{k+1}}{k+1} \cdots$

$h \in \mathbb{R}_{n+2}[x]$

<u>Th fondamental de l'analyse :</u>

Si $\begin{cases} f \in \mathcal{C}^0 \text{ sur } I \\ a \in I \end{cases}$

- Alors $g : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f s'annulant en a
- g $\mathcal{C}^1$ sur I
- $\forall x \in I \quad g'(x) = f(x)$

$\forall x,\ h(x) = \int_a^x \underbrace{(t-a)P(t)}_{f(t)}\,dt$

$\forall x,\ h'(x) = (x-a)P(x)$

$h'(a) = 0 \Rightarrow a$ racine de h'

$\Rightarrow a$ racine double de h

Ainsi h f° polynôme de degré $\leq n+2$
et admettant a pour racine
double

$\forall x \in \mathbb{R}\quad h(x) = (x-a)^2 R(x)$
avec $\deg R \leq n$

$\forall x \neq a\quad \Phi_a(P)(x) = \frac{1}{(x-a)^2}(x-a)^2 R(x)$
$= R(x)$

$\lim_{x \to a} \Phi_a(P)(x) = \Phi_a(P)(a) = \frac{P(a)}{2}$

IPP : $u(t) = P(t)$ $\quad u'(t) = P'(t)$

$v'(t) = (t-a)$ $\quad v(t) = \frac{(t-a)^2}{2}$

$$\int_a^x (t-a)P(t)\,dt = \frac{(x-a)^2}{2}P(x) - \int_a^x \frac{(t-a)^2}{2}P'(t)\,dt$$

$\forall x \neq a,$

$$\Phi_a(P)(x) = \frac{P(x)}{2} - \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x \frac{(t-a)^2}{2}P'(t)\,dt$$

$$\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \cdots = \frac{H(x)-H(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} H'(a)\right)$$

- Mq $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\Phi_a(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

  Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$

Rappel : Soit f bijection de E ds F.

Alors : $\forall y \in F \; \exists! x \in E \; y = f(x)$

Ĉ Ψ_a bijectif, on a :

$\exists! Q \in \mathbb{R}_n[X]$ $\Psi_a(Q) = P$

Ainsi $\Phi_a(P) = \Phi_a(\Psi_a(Q)) = Q$ (cf 4)b))

Donc $\forall P \in \mathbb{R}_n(X) \quad \phi_a(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

4) d) <u>m1</u> :

$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad \phi_a^{-1}(Q_k) = \Psi_a(Q_k) = (k+2)\,Q_k$

appliquons ϕ_a :

$$\underbrace{\phi_a \circ \phi_a^{-1}}_{Id}(Q_k) = \phi_a((k+2)\,Q_k)$$

$$Q_k = (k+2)\,\phi_a(Q_k)$$

$$\phi_a(Q_k) = \frac{1}{k+2}\,Q_k \quad (k+2 \neq 0)$$

$$Sp(\phi_a) = \left\{ \frac{1}{k+2},\ k \in [\![0,n]\!] \right\}$$

$$E_{\frac{1}{k+2}}(\phi_a) = \mathrm{Vect}(Q_k)$$

$A = P D P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & & (0) \\ & 3 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & n+2 \end{pmatrix}$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{n+2} \end{pmatrix}$$

Partie B :

5(a) → th fondamental de l'analyse...

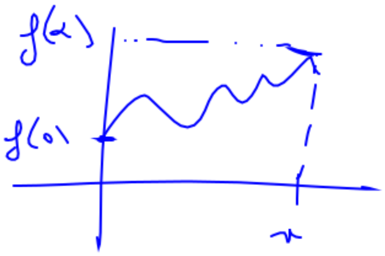
$\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = x f(x)$

b) Si f continue sur $[a,b]$

alors f bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

f continue sur $[0,x]$ donc est bornée sur $[0,x]$ et atteint ses bornes



$\exists (\alpha_x, \beta_x) \in [0,x]^2 \ \forall t \in [0,x] \ f(\alpha_x) \leq f(t) \leq f(\beta_x)$

c) $0 \leq \alpha_x \leq x$

$0 \leq \beta_x \leq x$

$\lim\limits_{x \to 0} \alpha_x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \beta_x = 0$

f continue en 0, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(\alpha_x) = f(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(\beta_x)$

$f(\alpha_x) \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x t f(t)\,dt \leq f(\beta_x) \frac{x^2}{2}$

$\frac{f(\alpha_x)}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{f(\beta_x)}{2}$

th enc$^{\text{t}}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ > 0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$

d) ⚠ Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$ on raisonne sur $[x, 0]$

$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt \ldots$

6) th fond de l'analyse

7) a) (cf ESSEC 2003 S)

$u = -t$ ---

b) croissance / positivité de l'intégration

distinguer les cas : $x < 0$, $x > 0$, $x = 0$

Partie C : $\forall x \in \mathbb{R}$ $0 \leq F(x) \leq 1$

$\lim\limits_{-\infty} F = 0$

$\lim\limits_{+\infty} F = 1$

$F \nearrow$

F continue sur $\mathbb{R}$

9) $x > 0$ $\forall t \in [0, x]$ $0 \leq t F(t) \leq t F(x)$

$$0 \leq \frac{2}{x^2} \int_0^x t F(t)\,dt \leq \frac{2}{x^2} F(x) \int_0^x t\,dt$$

$$0 \leq G(x) \leq F(x) \frac{2}{x^2} \frac{x^2}{2}$$

10) $G(x) = 2\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]$

$u(x) = \int_0^x t f(t)\,dt$

$v(x) = x^2$

$\Rightarrow G'(x) = 2\left[\dfrac{x^3 f(x) - 2x\int_0^x t f(t)\,dt}{x^4}\right]$

$$\boxed{G'(x) = \frac{2}{x}\left(f(x) - G(x)\right)}$$

11) on veut mq $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1$

ie $\int_{-\infty}^{0} G'(x)\,dx + \int_0^{+\infty} G'(x)\,dx = 1$

__m1__ : $G'(x) = \frac{2}{x}(F(x) - G(x))$ ...

__m2__ : en utilisant partie B ...

$\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 g(t)\,dt$?

$$\int_x^0 g(t)\,dt = \int_x^0 G'(t)\,dt = [G(t)]_x^0$$
$$= G(0) - G(x)$$

on rq : $G(x) = 2\,\phi(F)(x)$ ⚠

or $\lim_{-\infty} F = 0$, ainsi d'après 8) b)

$$\lim_{x \to -\infty} \phi(F)(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} G(x) = 0$$

Ainsi $\lim_{x \to -\infty} \boxed{\int_x^0 g(t)\,dt = G(0)}$

De m̂ ; $\forall x > 0$, $\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x G'(t)\,dt$

$$= G(x) - G(0)$$

$\forall x \neq 0$, $G(x) = 2\,\phi(F)(x)$

or $F \xrightarrow[+\infty]{} 1$, d'après 8) a)

$$\phi(F) \xrightarrow[+\infty]{} \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,dt = 1 - G(0) = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt$$

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 g(t)\,dt = G(0) = \int_{-\infty}^0 g(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 1 - G(0) + G(0) = 1$$

$$\begin{cases} g \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ privé éventt de } 0 \\ g \text{ positive } \left(g(x) = G'(x) = \frac{2}{x}(F(x) - G(x)) \ldots \right. \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 1 \end{cases}$$

Partie D :

13) a) on veut mq $\boxed{-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy} \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\left(|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b \right)$

Br :

$$-(x^2+y^2) \leq 2xy$$

$$x^2+y^2 - 2xy \geq 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$(x-y)^2 \geq 0$)

13)b) (Br on veut mq $\int |f(x)g(x)|\,dx$ cv

$0 \leq |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}\left(f(x)^2 + g(x)^2\right)$

or f et $g \in E_2$

donc $\int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx$ et $\int_0^{+\infty} g(x)^2\,dx$ cv

par linéarité : $\int_0^{+\infty} f(x)^2 + g(x)^2\,dx$ cv...

+ critère de comparaison...

SUITES

AUTOUR DE LA MOYENNE DE CESARO

Dans tout le problème, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on construit à partir de u la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée la suite des moyennes de Césaro de u.

Partie I : Quelques propriétés

1. On suppose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornée.
   a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est également bornée.
   b. La réciproque est-elle vraie ?
2. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   a. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n \le u_n$.
   b. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   c. Etudier la réciproque. (*Indication :* Considérer la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_{2n-1} = n+2$ et $u_{2n} = 3n$.)

Partie II : étude du cas où la suite *u* est croissante

Dans cette partie, la suite u est croissante.

1. Une inégalité utile
   a. Justifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n \le \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \le u_{2n}$
   b. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n \le 2v_{2n} - v_n \le u_{2n}$.
2. Nature
   a. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ. Montrer à l'aide des questions précédentes que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.
   b. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.
   c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ si, et seulement si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Partie III. Théorème de Césaro – Cas général

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ. On se donne une réel $\varepsilon > 0$.
   a. Montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_1$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
   b. Montrer qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_2$, $\left|\frac{\sum_{k=1}^{n_1} u_k - n_1\ell}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
   c. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$
   d. Conclure

Plus généralement, nous avons **le théorème de Césaro** suivant :

Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers un réel ℓ (resp. $+\infty$, resp. $-\infty$), alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des moyennes de Césaro tend également vers ℓ (resp. $+\infty$, resp. $-\infty$).

2. Est-ce que la réciproque du théorème de Césaro est vraie ? On cherchera par exemple une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ divergente dont la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des moyennes de Césaro converge, par exemple vers 0.

Partie IV – Quelques applications

1. **Le lemme de l'escalier**.
   Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $b_n = a_n - a_{n-1}$. On suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers une limite réelle ℓ (resp. $+\infty$, resp. $-\infty$).
   Montrer que la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend aussi vers ℓ (resp. $+\infty$, resp. $-\infty$).
2. **Le lemme de Hadamard**.
   Déduire du lemme de l'escalier que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$, alors la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend également vers ℓ.
3. Déduire de ce qui précède l'étude de la convergence des suites suivantes :
   a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$
   b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

18) b) <u>conjecture</u> : si (u_n) cv vers ℓ
dans (v_n) cv vers $\frac{\ell}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k \qquad (u_n) \downarrow$

$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad u_k \geqslant u_n$

$k u_k \geqslant k u_n$

$\sum_{k=1}^{n} k u_k \geqslant u_n \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}}$

$\frac{1}{n(n+1)} \sum \ldots \geqslant \frac{u_n}{2}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n \geqslant \frac{u_n}{2}}$

V_{2n} ?

$$V_{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} k u_k$$

$$= \frac{1}{2n(2n+1)} \left[\sum_{k=1}^{n} k u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} k u_k \right]$$

$$= \frac{\cancel{n}(n+1)}{2\cancel{n}(2n+1)} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k}_{V_n} + \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k u_k$$

$$V_{2n} = \frac{n+1}{2(2n+1)} V_n + \boxed{\frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k u_k}$$

$\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$ $\quad u_k \leq u_{n+1}$

$$k u_k \leq k u_{n+1}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k u_k \leq \sum_{k=n+1}^{2n} k u_{n+1}$$

$$\leq u_{n+1} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} k \right)$$

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k u_k \leq \frac{u_{n+1}}{2n(2n+1)} \left[\sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n} k \right]$$

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k u_k \leq \frac{u_{n+1}}{2n(2n+1)} \left[\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$\leq \frac{u_{n+1}}{2(2n+1)} \left[\frac{2(2n+1) - (n+1)}{2} \right]$$

$$\leq \frac{u_{n+1}}{4(2n+1)} \left(\underbrace{4n+2 - n - 1}_{3n+1} \right)$$

$$\boxed{v_{2n} \leq \frac{n+1}{2(2n+1)} u_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}}$$

e) Si $\begin{cases} (u_n) \text{ cv } \ell \\ (u_n) \downarrow \end{cases}$ alors $\begin{cases} \underbrace{(v_n) \text{ cv vers } \frac{\ell}{2}} \\ (v_n) \downarrow \end{cases}$

c) $\to$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $2v_n \geq u_n$

$2v_{n+1} \geq u_{n+1}$

$u_{n+1} - 2v_{n+1} \leq 0$

cf d) $v_{n+1} - v_n \leq 0$

donc $(v_n) \downarrow$

$$V_n = \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{\geq 0} \sum \underbrace{k}_{\geq 0} \underbrace{U_k}_{\geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow (V_n) \downarrow$ minorée $\Rightarrow (V_n)$ cv

Snll $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

mq $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{\ell}{2}$

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell'$

$c)$: $V_n \geq \frac{U_n}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\ell' \geq \frac{\ell}{2}}$ Prolong^t inégalités

$$\underbrace{V_{2n}}_{\to \ell'} \leq \underbrace{\frac{n+1}{2(2n+1)}}_{\xrightarrow{+\infty} \frac{1}{4}} \underbrace{V_n}_{\to \ell'} + \underbrace{\frac{3n+1}{4(2n+1)}}_{\to \frac{3}{8}} \underbrace{U_{n+1}}_{\to \ell}$$

$$\ell' \leq \frac{1}{4}\ell' + \frac{3}{8}\ell$$

$$\frac{3}{4}\ell' \leq \frac{3}{8}\ell$$

$$\boxed{\ell' \leq \frac{\ell}{2}}$$

$$\frac{\ell}{2} \leq \ell' \leq \frac{\ell}{2} \implies \ell' = \frac{\ell}{2}$$

$$\implies \boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{\ell}{2}}$$

19) b) $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$

$(V_n) \nearrow$ majorée

$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

$U_{n+1} - U_n \geq 0 \implies (U_n) \nearrow$ cv

donc majorée par ℓ

$V_N = U_N - N v_N$

$V_N \leq U_N \leq \ell$

$V_{N+1} - V_N \geq 0 \Rightarrow (V_n) \nearrow$ majorée par ℓ

Donc (V_N) cv i.e. $\underline{\sum v_n \text{ cv}}$

c) Sup. $\lim_{N \to +\infty} N v_N = \ell$ avec $\ell \neq 0$

$N v_N \sim \ell$

$v_N \sim \frac{\ell}{N}$

Critère d'équivalence $\sum v_n$ $\hat{m}$ nature

que $\sum \frac{\ell}{N}$

or $\sum_{N \geq 1} \frac{\ell}{N}$ dv (Riemann)

Absurde car $\sum v_n$ cv...

Ainsi $\boxed{\ell = 0}$