myPRΣPA

Compte-rendu de séance

JEUDI 2 MAI 2019 18:03 1H04

Mathématiques - HEC 2019 ECE m1 Analyse by Olivier

RÉUNION

Responsable de la séance

Olivier SARFATI - PROF PROFESSEUR

Exemplaire de Julie ADMINISTRATEUR - ADMINISTRATEUR

Publié le 06/05/2019

Participants	Présence totale	Présence partielle	Absence
ADMINISTRATEUR Julie ADMINISTRATEUR			✖
LECOUTRE Ken ADMINISTRATEUR	✔		
LECOUTRE Ken PROFESSEUR			✖
3	1	0	2

Calcul des présences : Les étudiants sont considérés comme totalement présents s'ils se sont connectés à la salle de classe dans les 5 premières minutes après le début initialement programmé et sont restés jusqu'à la fin programmée de la séance (pendant les 3 dernières minutes). Les étudiants partiellement présents se sont connectés avec un retard qui dépassait les 5 premières minutes ou ont quitté la salle de classe plus tôt que 3 minutes avant la fin programmée. Les étudiants absents ne se sont jamais connectés à la salle de classe.

J. 19 1201

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 288

Conception : HEC Paris – ESSEC BS

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 30 avril 2018, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE

1. Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, $L = (1 \ \ 2 \ \ -1) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$ et le produit matriciel $M = C\,L$.

   a) (*i*) Calculer M et M^2.
   (*ii*) Déterminer le rang de M.
   (*iii*) La matrice M est-elle diagonalisable ?

   b) (*i*) Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice P est inversible et calculer le produit $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (*ii*) Trouver une matrice inversible Q dont la transposée ${}^tQ$ vérifie : ${}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (*iii*) Pour une telle matrice Q, calculer le produit $P\,M\,Q$.

2. La fonction *Scilab* suivante permet de multiplier la i-ème ligne L_i d'une matrice A par un réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow a\,L_i$ (où $a \neq 0$).

```
function B=multlig(a,i,A)
  [n,p]=size(A);
  B=A;
  for j=1:p
      B(i,j)=a*B(i,j)
  end;
endfunction
```


Tournez la page S.V.P.

a) Donner le code *Scilab* de deux fonctions `addlig` (d'arguments `b,i,j,A`) et `echlig` (d'arguments `i,j,A`) permettant d'effectuer respectivement les deux autres opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :

$$L_i \leftarrow L_i + b\,L_j\ (i \neq j) \quad \text{et} \quad L_i \leftrightarrow L_j\ (i \neq j).$$

b) Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat `B` que la fonction `multlig`.

```
function B=multligmat(a,i,A)
    [n,p]=size(A);
    D=eye(n,n);
    D(i,i)=a;
    B=D*A;
endfunction
```

3. Dans cette question, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang 1. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa i-ème ligne et de sa j-ème colonne, qui vaut 1.

a) (i) Justifier l'existence d'une matrice-colonne non nulle $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et d'une matrice-ligne non nulle $L = (\ell_1 \ \ldots \ \ell_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ telles que $M = C\,L$.

(ii) Calculer la matrice $M\,C$ et en déduire une valeur propre de M.

(iii) Montrer que si le réel $\sum_{i=1}^{n} c_i \ell_i$ est différent de 0, alors la matrice M est diagonalisable.

b) (i) À l'aide de l'égalité $M = C\,L$, établir l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $P\,M\,Q = E_{1,1}$.

(ii) En déduire que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, il existe deux matrices inversibles P_i et Q_j telles que $P_i\,M\,Q_j = E_{i,j}$.

PROBLÈME

Dans ce problème, on définit et on étudie les fonctions génératrices des moments et les fonctions génératrices des cumulants de variables aléatoires discrètes ou à densité.
Les cumulants d'ordre 3 et 4 permettent de définir des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement qui viennent compléter la description usuelle d'une loi de probabilité par son espérance (paramètre de position) et sa variance (paramètre de dispersion) ; ces cumulants sont notamment utilisés pour l'évaluation des risques financiers.

Dans tout le problème :

- on note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$;
- sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont respectivement notées $E(X)$ et $V(X)$;
- pour toute variable aléatoire X et pour tout réel t pour lesquels la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, on pose :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \quad \text{et} \quad K_X(t) = \ln\big(M_X(t)\big)\,;$$

(les fonctions M_X et K_X sont respectivement appelées la *fonction génératrice des moments* et la *fonction génératrice des cumulants de* X)

HEC 2001, HEC 2008 (II)
ESSEC 2005 ---

- lorsque, pour un entier $p \in \mathbf{N}^*$, la fonction K_X est de classe C^p sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle *cumulant d'ordre p de X*, noté $Q_p(X)$, la valeur de la dérivée p-ième de K_X en 0 :
$$Q_p(X) = K_X^{(p)}(0).$$

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie :

- on note n un entier supérieur ou égal à 2 ;
- toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes à valeurs entières ;
- on note S une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont la loi est donnée par :
$$P([S=-1]) = P([S=+1]) = \frac{1}{2}.$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$.
   a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que la fonction M_X est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.
   b) Justifier pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, l'égalité : $M_X^{(p)}(0) = E(X^p)$.
   c) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X.
   On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} G_X(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} P([X = k-n])x^k \\ G_Y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} P([Y = k-n])x^k \end{cases}.$$
   (i) Vérifier pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'égalité : $G_X(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{nt} M_X(t)$.
   (ii) Justifier la relation : $\forall t \in \mathbf{R}$, $G_X(\mathrm{e}^t) = G_Y(\mathrm{e}^t)$.
   (iii) En déduire que la variable aléatoire Y suit la même loi que X.
2. Dans cette question, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
   On suppose que les variables aléatoires X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = S\,X_2$.
   a) (i) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_2.
   (ii) Calculer les probabilités $P([Y_2 = y])$ attachées aux diverses valeurs possibles y de Y_2.
   b) Vérifier que la variable aléatoire $X_2 - (S+1)$ suit la même loi que Y_2.
3. Le script *Scilab* suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire Y_2 définie dans la question précédente.

```
(1)    n=10 ;
(2)    X=grand(n,2,'bin',2,0.5) ;
(3)    B=grand(n,2,'bin',1,0.5) ;
(4)    S=2*B-ones(n,2) ;
(5)    Z1=[S(1:n,1).*X(1:n,1),X(1:n,1)-S(1:n,1)-ones(n,1)] ;
(6)    Z2=[S(1:n,1).*X(1:n,1),X(1:n,2)-S(1:n,2)-ones(n,1)] ;
```

   a) Que contiennent les variables `X` et `S` après l'exécution des quatre premières instructions ?
   b) Expliquer pourquoi, après l'exécution des six instructions, chacun des coefficients des matrices `Z1` et `Z2` contient une simulation de la variable aléatoire Y_2.

Tournez la page S.V.P.

c) On modifie la première ligne du script précédent en affectant à `n` une valeur beaucoup plus grande que 10 (par exemple, 100000) et en lui adjoignant les deux instructions (7) et (8) suivantes :

```
(7)    p1=length(find(Z1(1:n,1)==Z1(1:n,2)))/n;
(8)    p2=length(find(Z2(1:n,1)==Z2(1:n,2)))/n;
```

Quelles valeurs numériques approchées la loi faible des grands nombres permet-elle de fournir pour `p1` et `p2` après l'exécution des huit lignes du nouveau script ?

Dans le langage *Scilab*, la fonction `length` fournit la « longueur » d'un vecteur ou d'une matrice et la fonction `find` calcule les positions des coefficients d'une matrice pour lesquels une propriété est vraie, comme l'illustre le script suivant :

```
--→ A=[1 ;2 ;0 ;4] ;
--→ B=[2 ;2 ;4 ;3] ;
--→ length(A)
ans  = 4.
--→ length([A,B])
ans  = 8.
--→ find(A<B)
ans  = 1. 3. // car 1<2 et 0<4, alors que 2>=2 et 4>=3
```

4. Dans cette question, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
   On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = S\,X_n$.
   a) Justifier que la fonction M_{X_n} est définie sur $\mathbf{R}$ et calculer $M_{X_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.
   b) Montrer que la fonction M_{Y_n} est donnée par : $\forall t \in \mathbf{R},\ M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}\left((1+e^t)^n + (1+e^{-t})^n\right)$.
   c) En utilisant l'égalité $(1+e^{-t})^n = e^{-nt}(1+e^t)^n$, montrer que Y_n suit la même loi que la différence $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. Soit X une variable aléatoire et $\mathcal{D}_X$ le domaine de définition de la fonction K_X.
   a) Donner la valeur de $K_X(0)$.
   b) Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $Y = aX + b$. Justifier pour tout réel t pour lequel $a\,t$ appartient à $\mathcal{D}_X$, l'égalité :
   $$K_Y(t) = b\,t + K_X(a\,t)\,.$$
   c) On suppose ici que les variables aléatoires X et $-X$ suivent la même loi.
   Que peut-on dire dans ce cas des cumulants d'ordre impair de la variable aléatoire X ?

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$ les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y.
   a) Montrer que pour tout réel t appartenant à la fois à $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$, on a : $K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)$.
   b) En déduire une relation entre les cumulants des variables aléatoires X, Y et $X+Y$.

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
   a) Montrer que la fonction M_U est définie sur $\mathbf{R}$ et donnée par : $\forall t \in \mathbf{R},\ M_U(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.
   b) Calculer la dérivée de la fonction M_U en tout point $t \neq 0$.
   c) Trouver la limite du quotient $\dfrac{M_U(t) - 1}{t}$ lorsque t tend vers 0.
   d) Montrer que la fonction M_U est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

EML 2009
Edhec 2001
...

8. Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.
Dans cette question, on note X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.
a) Exprimer K_X en fonction de M_U, où la variable aléatoire U a été définie dans la question 7.
b) Justifier que la fonction K_X est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et établir l'égalité : $Q_1(X) = E(X)$.

9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.
a) Déterminer les fonctions M_T et K_T.
b) En déduire tous les cumulants de T.

10. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
a) Justifier pour tout $t \in \mathbf{R}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx$.
b) Montrer que la fonction M_Z est définie sur $\mathbf{R}$ et donnée par : $\forall t \in \mathbf{R},\ M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
c) En déduire la valeur de tous les cumulants d'une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu \in \mathbf{R}$ et d'écart-type $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$.

11. Soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire T_n suit la loi de Poisson de paramètre n. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.
a) Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vers une variable aléatoire W. TCL
b) Déterminer la fonction K_{W_n}.
c) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} K_{W_n}(t) = K_W(t)$.

Partie III. Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe C^4 sur un intervalle ouvert I contenant l'origine.
On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, on a $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.
De plus, on pose : $\mu_4(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^4\right)$.

12. Justifier les égalités : $Q_1(X) = E(X)$ et $Q_2(X) = V(X)$.

13. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose : $S = X_1 - X_2$.
a) Montrer que la variable aléatoire S possède un moment d'ordre 4 et établir l'égalité :
$$E(S^4) = 2\mu_4(X) + 6\left(V(X)\right)^2.$$
b) Montrer que les fonctions M_S et K_S sont de classe C^4 sur I et que pour tout $t \in I$, on a :
$$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t)M_S(t) + 3K_S^{(3)}(t)M_S'(t) + 3K_S''(t)M_S''(t) + K_S'(t)M_S^{(3)}(t).$$
c) En déduire l'égalité : $E(S^4) = Q_4(S) + 3\left(V(S)\right)^2$.

14. Justifier que le cumulant d'ordre 4 de X est donné par la relation : $Q_4(X) = \mu_4(X) - 3\left(V(X)\right)^2$.

FIN

8. Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.
Dans cette question, on note X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.
   a) Exprimer K_X en fonction de M_U, où la variable aléatoire U a été définie dans la question 7.
   b) Justifier que la fonction K_X est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et établir l'égalité : $Q_1(X) = E(X)$.

9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.
   a) Déterminer les fonctions M_T et K_T.
   b) En déduire tous les cumulants de T.

10. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
   a) Justifier pour tout $t \in \mathbf{R}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$.
   b) Montrer que la fonction M_Z est définie sur $\mathbf{R}$ et donnée par : $\forall\, t \in \mathbf{R},\ M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
   c) En déduire la valeur de tous les cumulants d'une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu \in \mathbf{R}$ et d'écart-type $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$.

11. Soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire T_n suit la loi de Poisson de paramètre n. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.
   a) Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vers une variable aléatoire W.
   b) Déterminer la fonction K_{W_n}.
   c) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} K_{W_n}(t) = K_W(t)$.

Partie III. Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe C^4 sur un intervalle ouvert I contenant l'origine.
On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, on a $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.
De plus, on pose : $\mu_4(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^4\Big)$.

12. Justifier les égalités : $Q_1(X) = E(X)$ et $Q_2(X) = V(X)$.

13. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose : $S = X_1 - X_2$.
   a) Montrer que la variable aléatoire S possède un moment d'ordre 4 et établir l'égalité :
$$E(S^4) = 2\,\mu_4(X) + 6\big(V(X)\big)^2.$$
   b) Montrer que les fonctions M_S et K_S sont de classe C^4 sur I et que pour tout $t \in I$, on a :
$$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t)M_S(t) + 3K_S^{(3)}(t)M_S'(t) + 3K_S''(t)M_S''(t) + K_S'(t)M_S^{(3)}(t).$$
   c) En déduire l'égalité : $E(S^4) = Q_4(S) + 3\big(V(S)\big)^2$.

14. Justifier que le cumulant d'ordre 4 de X est donné par la relation : $Q_4(X) = \mu_4(X) - 3\big(V(X)\big)^2$.

FIN

Exercice

1) $\forall j \in [\![1, p]\!]$

$B(i,j) = a \times B(i,j)$

i^e ligne, j^e colonne

$\underbrace{a \times a_{i,1}}_{B_{i,1}} \quad \underbrace{a \times a_{i,2}}_{B_{i,2}} \quad - - \ldots \quad \underbrace{\quad}_{B_{i,j}} \; - \ldots \; \underbrace{a \times a_{i,p}}_{B_{i,p}}$

$a\,(a_{i,1} \; a_{i,2} \; - - \; a_{i,p})$

2) a)

```
addlig(b,i,j,A)
[n,p] = size(A)
B = A
for k = 1:p
    B(i,k) = B(i,k) + b * B(j,k)
end;
endfunction
```

$B(i,:) \longrightarrow i^e$ ligne de B

- $B = A$

$B(i,:) = A(j,:)$

$B(j,:) = A(i,:)$

b) $D = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & a & \\ (0) & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

i^e ligne
i^e colonne

$D \times A = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & a & \\ (0) & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{12} & a_{13} \\ a \times a_{2,1} & a \times a_{2,2} & a \times a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{33} \end{pmatrix}$

3) a) $rg(M) = 1$ $\quad i^e$ colonne

$$M = \begin{array}{ccccc} \alpha_1 C & \alpha_2 C & C & \dots & \alpha_n C \\ \hline \square & \square & \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} & & \square \end{array} \qquad L = (\alpha_1\ \alpha_2 \dots \underset{\uparrow\, 1}{\alpha_i} \dots \alpha_n)$$

$\left(\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1) \dots f(e_n)) = \operatorname{Vect}(f(e_i)) \right)$

1) $E(e^{tX}) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} e^{tk} P(X=k)$

$= \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} P(X=k)\, e^{tk}$

$\forall k \in [\![-n,n]\!] \quad t \mapsto e^{tk} \quad C^\infty$ sur $\mathbb{R}$

th généraux $\Rightarrow M_X \ C^\infty$ sur $\mathbb{R}$

b) $\forall t \in \mathbb{R} \quad M_X(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} P(X=k)\, e^{tk}$

$M_X'(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} P(X=k)\, k\, e^{tk}$

$$M_X''(t) = \sum_{k=-n}^{n} P(X=k)\, k^2 e^{tk}$$

⚠ retenir

$\forall t \in \mathbb{R}$, $$M_X^{(p)}(t) = \sum_{k=-n}^{n} P(X=k)\, k^p e^{tk}$$

↓

$(t=0)$ $$M_X^{(p)}(0) = \sum_{k=-n}^{n} k^p P(X=k)$$

$$\boxed{= E(X^p)}$$

1) c) (i) $$G_X(e^t) = \sum_{k=0}^{2n} P(X=k-n)\underbrace{(e^t)^k}_{e^{tk}}$$

or ... $$e^{nt} M_X(t) = e^{nt} \sum_{k=-n}^{n} e^{tk} P(X=k)$$

$$= e^{nt} \sum_{k=0}^{2n} e^{t(k-n)} P(X=k-n)$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \cancel{e^{nt}}\, e^{tk}\, \cancel{e^{-nt}}\, P(X=k-n)$$

$$\boxed{= G_X(e^t)}$$

$M_X = M_Y \ldots$

$$G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t) = e^{nt} M_Y(t)$$
$$= G_Y(e^t)$$

iii) ma ny

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{2n} P(X = k-n)(e^t)^k = \sum_{k=0}^{2n} P(\cancel{X} = k-n)(e^t)^k$

⚠ $t \mapsto e^t$ bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists ! \, x > 0 \quad x = e^t$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \sum_{k=0}^{2n} P(X=k-n)\, x^k = \sum_{k=0}^{2n} P(Y=k-n)\, x^k$

$\forall x > 0, \quad \sum_{k=0}^{2n} \left[P(X=k-n) - P(Y=k-n) \right] x^k = 0$

Posons $H = \sum_{k=0}^{2n} \left[P(X=k-n) - P(Y=k-n) \right] X^k$

$\forall x > 0 \quad H(x) = 0$ donc H admet
1 infinité de racines
or $\deg H \leq 2n$

$\Rightarrow \quad H = 0$

1 polynôme nul ssi tous ses coeff $= 0$

$\Rightarrow \forall k \in [\![0, 2n]\!], \; P(X = k-n) = P(Y = k-n)$

$\forall k \in [\![-n, n]\!] \quad P(X = k) = P(Y = k)$

X et Y même loi !

2) $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$

$Y_2 = S X_2$

a) i) $X_2(\Omega) = [\![0, 2]\!] = \{0, 1, 2\}$

$S(\Omega) = \{-1, 1\}$

$Y_2(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$Y_2(\Omega) = [\![-2, 2]\!]$

ii) $P(Y_2 = -2)$?

$$= P(SX_2 = -2) = P((S=-1) \cap (X_2 = 2))$$

$$= \underbrace{P(S=-1)}_{\frac{1}{2}} \; \underbrace{P(X_2=2)}_{\mathcal{B}(2,\frac{1}{2})}$$

!

$$P((Y_2 = 0)) = P((S=-1) \cap (X_2 = 0) \cup (S=1) \cap X_2 = 0)$$

4) a) $M_{X_n} : t \mapsto E(e^{tX})$

$$M_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{tk}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t)^k$$

Binôme Newton

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n (1+e^t)^n$$

b) $Y_n(\Omega) = [\![-n, n]\!]$

$$\Lambda_{Y_n}(t) = \sum_{k=-n}^{n} P(Y_n = k)\, e^{tk}$$

$$= \sum_{k=-n}^{-1} P(SX_n = k)\, e^{tk} + P(Y_n = 0) + \sum_{k=1}^{n} P(SX_n = k)\, e^{tk}$$

easy

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{P(S=-1)}_{=\frac{1}{2}} P(X_n = k)\, e^{-tk}$$

10) a) $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$\forall t \quad f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Astuce : $tx - \frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + tx$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2tx\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2tx + \underline{t^2 - t^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left(x^2 - 2tx + t^2\right) - t^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left(x - t\right)^2 - t^2\right)$$

$$\exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)$$

$$\hookrightarrow \mathcal{N}(t, 1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}\, \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$