Compte-rendu de séance

VENDREDI 3 MAI 2019 18:17 0H41

Mathématiques - HEC 2019 ECS2 analyse Olivier

RÉUNION

Responsable de la séance

Olivier SARFATI - PROF PROFESSEUR

Exemplaire de Julie ADMINISTRATEUR - ADMINISTRATEUR

Publié le 06/05/2019

Page	Libellé
4	Document HEC 2019 S2 scanné.pdf (00:00:12)
9	Document Polynomes et Séries de Riemann.pdf (00:00:12)
14	Document Polynômes - Liens racines et coefficients.pdf (00:00:27)

Participants	Présence totale	Présence partielle	Absence
ADMINISTRATEUR Julie ADMINISTRATEUR			✖
LECOUTRE Ken ADMINISTRATEUR		✔	
LECOUTRE Ken PROFESSEUR			✖
3	0	1	2

Calcul des présences : Les étudiants sont considérés comme totalement présents s'ils se sont connectés à la salle de classe dans les 5 premières minutes après le début initialement programmé et sont restés jusqu'à la fin programmée de la séance (pendant les 3 dernières minutes). Les étudiants partiellement présents se sont connectés avec un retard qui dépassait les 5 premières minutes ou ont quitté la salle de classe plus tôt que 3 minutes avant la fin programmée. Les étudiants absents ne se sont jamais connectés à la salle de classe.

J. 19 1198

BCE BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 283

Conception : HEC Paris – ESCP Europe

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES II

Jeudi 2 mai 2019, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

La régression logistique permet de modéliser l'influence qu'exercent des facteurs exogènes sur une variable binaire, c'est-à-dire une variable ne pouvant prendre que deux valeurs.
Outre son domaine d'application privilégié qui est l'apprentissage automatique (machine learning), la régression logistique est couramment utilisée aussi bien en médecine qu'en actuariat et en économétrie.

Partie I. Fonction logistique et lois logistiques

On appelle *fonction logistique* la fonction Λ définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\ \Lambda(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1.a) Montrer que Λ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0,1[$, dont la bijection réciproque est la fonction L définie par :

$$\forall x \in]0,1[,\ L(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

b) Calculer la dérivée de la fonction Λ.

c) Justifier l'existence d'un unique réel x_0 tel que : $\Lambda(x_0) = x_0$.

d) Établir pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'inégalité : $|\Lambda(x) - x| \leqslant |x - x_0|$.

2. Le script *Scilab* suivant, dont la ligne (1) définit la fonction Λ, permet de calculer une valeur approchée de x_0 par la méthode de dichotomie.

```
(1) deff('y=Lambda(x)','y=1/(1+exp(-x))');
(2) a=0;
(3) b=1;
(4) eps= .........;
(5) while b-a>eps;
(6)   c=(a+b)/2;
(7)   if Lambda(c)>c then a=c; else b= c....; end;
(8) end;
(9) x0=(a+b)/2
```


Tournez la page S.V.P.

a) Compléter la ligne (7) et justifier le choix des valeurs affectées en lignes (2) et (3) aux variables a et b.

b) Quelle valeur maximale peut-on affecter en ligne (4) à la variable eps pour être assuré que l'erreur d'approximation commise ne dépasse pas 10^{-4} ?

c) Que peut-on dire de la valeur numérique obtenue par l'instruction (10) suivante ?

```
(10) Lambda(x0)-x0
```

3. On note λ la dérivée de la fonction Λ. $\rightarrow \lambda = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

a) Vérifier que λ est une densité de probabilité.

b) Préciser la parité de la fonction λ ; donner l'allure de sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal et en déterminer les points d'inflexion.

On dit qu'une variable aléatoire Z suit la *loi logistique standard* si elle admet la fonction λ pour densité.
Pour tout couple $(r,s) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$, on dit qu'une variable aléatoire Y suit la loi logistique $\mathcal{L}(r,s)$ si la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{Y-r}{s}$ suit la loi logistique standard.

4.a) Justifier qu'une variable aléatoire qui suit une loi logistique $\mathcal{L}(r,s)$ admet des moments de n'importe quel ordre et en indiquer l'espérance.

b) En utilisant la méthode d'inversion, écrire le script d'une fonction *Scilab*, `function S=grandlogis(n,p,r,s)`, fournissant pour tout couple `(n,p)` d'entiers strictement positifs, une matrice `S` à `n` lignes et `p` colonnes dont les coefficients sont des simulations de variables aléatoires indépendantes suivant la loi logistique $\mathcal{L}(r,s)$.

c) Décrire un procédé permettant de calculer une valeur approchée de la variance de la loi logistique standard à l'aide de la fonction `grandlogis`.

5. Soit U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

a) Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln\left(\dfrac{U_1}{U_2}\right)$ suit la loi logistique standard (on pourra utiliser un changement de variable exponentiel, c'est-à-dire de la forme $t = e^x$).

b) En déduire un nouveau script *Scilab* permettant de simuler une variable aléatoire suivant la loi logistique standard à l'aide de la fonction `grand`.

Partie II. Variance de la loi logistique standard

- Pour tout couple $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on note $\mathcal{I}m(z)$ la partie imaginaire b du nombre complexe $z = a + ib$.
- Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ de degré $d \in \mathbf{N}$, les termes non nuls $a_k X^k$ sont appelés les monômes de P et les a_k leurs coefficients.
- Dans la factorisation $P = a_d \prod_{k=1}^{d} (X - z_k)$ de P dans $\mathbf{C}[X]$ (lorsque $d \neq 0$), la somme $\sum_{k=1}^{d} z_k$ est appelée la somme des racines complexes de P, que les nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_d$ soient distincts ou non.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $P_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (X-1)^{n-k}$.

6.a) Expliciter les polynômes P_0 et P_1.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, préciser le degré du polynôme P_n et donner les coefficients de ses deux monômes de plus hauts degrés.

c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la somme des racines complexes de P_n est égale à $\dfrac{2n(n+1)}{3}$. $= \sum_{k=0}^{n} z_k$

7. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$.

a) Justifier les égalités suivantes :
$$\sin\big((2n+1)x\big) = \mathcal{I}m\Big(\big(\cos(x)+i\sin(x)\big)^{2n+1}\Big) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cos^{2(n-k)}(x)\times\sin^{2k+1}(x).$$

b) En déduire, pour tout $x \in\,]0,\pi[$, la relation : $\dfrac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin^{2n+1}(x)} = P_n\Big(\dfrac{1}{\sin^2(x)}\Big)$.

c) À l'aide du résultat de la question 6.c), montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

8. Soit $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a) Justifier les inégalités suivantes : $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$ et $\dfrac{1}{\sin^2(x)} - 1 \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2(x)}$.

b) En utilisant le résultat de la question 7.c), en déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'encadrement :
$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}.$$

c) Établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

9. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi logistique standard.

a) À l'aide d'une intégration par parties, justifier que la variance de Z, notée $V(Z)$, vérifie l'égalité :
$$V(Z) = 4\int_0^{+\infty}\frac{x\,e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

b) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'égalité :
$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty}x\,e^{-(k+1)x}\,dx + I_n, \quad \text{où} \quad I_n = (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{x\,e^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

c) Montrer que l'intégrale I_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire l'égalité :
$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

d) En utilisant la formule établie en 8.c), déduire de l'égalité précédente que la variance de Z est égale à $\dfrac{\pi^2}{3}$.

10.a) Établir la convergence des deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(x)\,e^{-x}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(\ln(x)\big)^2 e^{-x}\,dx$.

b) On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(x)\,e^{-x}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty}\big(\ln(x)\big)^2 e^{-x}\,dx$.

En utilisant le résultat de la question 5.a), calculer $J - I^2$.

Partie III. Estimation à partir de données binaires

Dans cette partie, θ est un paramètre réel inconnu et F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue et strictement positive sur $\mathbf{R}$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_\theta)$ suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre $F(\theta)$.

11. Justifier que F est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0,1[$. On note F^{-1} sa bijection réciproque.

$Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(F(\theta))$.

12. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j$.

Montrer que la suite $\left(\sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - F(\theta)\right)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée dont on précisera la variance.

13. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, on pose : $T_n(\omega) = \begin{cases} F^{-1}\left(\overline{Y}_n(\omega)\right) & \text{si } 0 < \overline{Y}_n(\omega) < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note E_n l'événement $[0 < \overline{Y}_n < 1]$.

a) Calculer $\mathbf{P}_\theta(E_n)$ et trouver la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

(*i*) Établir l'égalité ensembliste $\{\omega \in E_n \,/\, T_n(\omega) \leqslant x\} = [\overline{Y}_n \leqslant F(x)] \cap E_n$ et montrer que $[T_n \leqslant x]$ est un élément de la tribu $\mathcal{A}$.

(*ii*) Justifier l'encadrement :

$$\mathbf{P}_\theta\left([\overline{Y}_n \leqslant F(x)] \cap E_n\right) \leqslant \mathbf{P}_\theta\left([T_n \leqslant x]\right) \leqslant \mathbf{P}_\theta\left([\overline{Y}_n \leqslant F(x)] \cap E_n\right) + 1 - \mathbf{P}_\theta(E_n).$$

c) Montrer que pour tout $x \neq \theta$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}_\theta\left([T_n \leqslant x]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$.

d) En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs du paramètre θ.

14. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, on pose : $U_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{T_n(\omega) - \theta}{\overline{Y}_n(\omega) - F(\theta)} & \text{si } \overline{Y}_n(\omega) \neq F(\theta) \\ \dfrac{1}{f(\theta)} & \text{si } \overline{Y}_n(\omega) = F(\theta) \end{cases}$.

On admet sans démonstration que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, U_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_\theta)$.

a) Soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $B_n(\varepsilon)$ l'événement $\left[\left|U_n - \frac{1}{f(\theta)}\right| \leqslant \varepsilon\right]$.

easy (*i*) Établir l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in [\theta - \alpha, \theta + \alpha]$, $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(\theta)}\right| \leqslant \varepsilon$.

(*ii*) Pour un tel α, justifier l'inclusion : $[|T_n - \theta| \leqslant \alpha] \cap E_n \subset B_n(\varepsilon)$, où E_n a été défini dans la question 13.

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{f(\theta)}$.

c) En déduire que la suite $\left(\sqrt{n}(T_n - \theta)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée dont on précisera la variance.

Partie IV. Régression logistique

- Dans toute cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- Pour tout couple $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels et ${}^tM$ la transposée de toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$.
- Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, le produit scalaire usuel de deux vecteurs u et v de $\mathbf{R}^m$ est noté $\langle u, v\rangle$. Si U et V sont les matrices colonnes représentant u et v dans la base canonique, le produit scalaire $\langle u, v\rangle$ est donc l'unique coefficient de la matrice ${}^tUV$.
- *On rappelle* que les fonctions Λ et L ont été définies dans la partie I.

4/5

Dans cette partie, on note Y une variable aléatoire de Bernoulli, dite *variable endogène*, dont la loi dépend du niveau de p *facteurs exogènes*.

L'influence de ces facteurs sur la loi de Y est résumée par la fonction b qui associe à un vecteur $x \in \mathbf{R}^p$, la probabilité $b(x)$ que Y soit égale à 1 lorsque les niveaux des facteurs sont donnés par les composantes du vecteur x.

Dans le *modèle de régression logistique* envisagé dans cette partie, la fonction b est supposée de la forme :

$$b : x \longmapsto \Lambda(\langle \alpha, x \rangle)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ est un vecteur de $\mathbf{R}^p$ dont les composantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont des paramètres inconnus qui représentent les degrés d'influence des divers facteurs exogènes sur la variable endogène Y.

Pour estimer les paramètres du modèle, on dispose de k vecteurs $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ de $\mathbf{R}^p$ ($k \in \mathbf{N}^*$) et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, d'une suite $(Y_{i,n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre $b(x^{(i)}) = \Lambda(\langle \alpha, x^{(i)} \rangle)$.

Pour chaque indice fixé i et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les variables aléatoires $Y_{i,1}, Y_{i,2}, \dots, Y_{i,n}$ définissent donc un n-échantillon associé à la loi de la variable endogène lorsque les niveaux des facteurs exogènes sont les composantes $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_p^{(i)}$ du vecteur $x^{(i)}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^p$.

15. On note respectivement A et M la matrice du vecteur α et la matrice de la famille $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)})$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^p$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_p^{(1)} & \dots & x_p^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbf{R}).$$

On suppose que le rang de la matrice M est égal à p.

a) Montrer que la matrice $M\,{}^tM$ est inversible.

b) Montrer que pour toute matrice $H \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$, la matrice $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ pour laquelle l'unique coefficient de la matrice ${}^t({}^tMU - H)({}^tMU - H)$ est le plus petit possible, est la matrice $(M\,{}^tM)^{-1}MH$. algorithme

c) Expliquer pourquoi les lois des variables aléatoires $Y_{i,n}$ ne suffiraient pas à définir le vecteur α si le rang de M n'était pas égal à p.

16. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $i \in [\![1, k]\!]$, on pose $\overline{Y}_{i,n} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{i,j}$ et pour tout $\omega \in \Omega$:

$$T_{i,n} = \begin{cases} L(\overline{Y}_{i,n}(\omega)) & \text{si } 0 < \overline{Y}_{i,n}(\omega) < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Soit $(c_1, c_2, \dots, c_k) \in \mathbf{R}^k$. En utilisant les résultats de la partie III, montrer que $\left(\sum_{i=1}^{k} c_i T_{i,n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs du paramètre $\sum_{i=1}^{k} c_i \langle \alpha, x^{(i)} \rangle$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, on pose, $H_n(\omega) = \begin{pmatrix} T_{1,n}(\omega) \\ T_{2,n}(\omega) \\ \vdots \\ T_{k,n}(\omega) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A_{1,n}(\omega) \\ A_{2,n}(\omega) \\ \vdots \\ A_{p,n}(\omega) \end{pmatrix} = (M\,{}^tM)^{-1}MH_n(\omega)$.

Montrer que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la suite $(A_{j,n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de α_j.

FIN

Polynômes et Séries de Riemann

Le but du problème est de déterminer la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, ainsi que des valeurs approchées de π

Partie I

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$

b) En déduire que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, est convergente

Dans toute la suite du problème, on notera $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et

$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

2) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_n + \frac{1}{n}$

a) Montrer que les suites $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant S - S_n \leqslant \frac{1}{n}$ et déterminer $n \in \mathbb{N}^*$ pour que S_n soit une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

c) Déterminer un encadrement de R_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$ puis montrer que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant S_n + \frac{1}{n} - S \leqslant \frac{1}{n^2}$
Déterminer $n \in \mathbb{N}^*$ pour que T_n soit une valeur approchée de S à 10^{-4} près

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}$

1) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :
$\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin\left[(2n+1)\theta\right] = \sin^{2n+1}(\theta)\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\text{cotan}^{2n-2k}(\theta)\right]$

On rappelle que pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{cotan}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

2) Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $P(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}X^{n-k}$

a) Montrer que $\theta \longmapsto \text{cotan}^2(\theta)$ est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Montrer que P est le seul polynôme qui vérifie : $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ P(\text{cotan}^2(\theta)) = \frac{\sin\left[(2n+1)\theta\right]}{\sin^{2n+1}(\theta)}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En posant $x = \text{cotan}^2(\theta)$, déterminer toutes les racines de P sur $\mathbb{R}_+^*$

d) Déterminer toutes les racines de P sur $\mathbb{R}$ et factoriser P

3) On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les n racines de P

a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{n(2n-1)}{3}$

b) Démontrer que : $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(\theta) < \theta < \tan(\theta)$ et $\dfrac{1}{\sin^2(\theta)} = 1 + \cotan^2(\theta)$

c) En déduire que : $\dfrac{n(2n-1)}{3} < \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{p^2\pi^2} < \frac{n(2n+2)}{3}$

d) En déduire un encadrement de S_n, puis calculer la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$, $k \geqslant 1$

4) On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$, $T_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2}$ et $U_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2}$

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre W_{2n}, T_n et U_n et une relation entre S_{2n}, T_n et U_n

b) En déduire que les série de termes généraux $\dfrac{1}{(2n)^2}$, $n \geqslant 1$; $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$, $n \geqslant 1$ et $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $n \geqslant 1$ sont convergentes et calculer leur somme

Partie III

1) Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Soit n un entier naturel non nul

a) Justifier, en utilisant le théorème du cours, la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k^p}$, $k \geqslant n+1$

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)^p} \leqslant \dfrac{1}{(p-1)}\left[\dfrac{1}{k^{p-1}} - \dfrac{1}{(k+1)^{p-1}}\right] \leqslant \dfrac{1}{k^p}$

c) En déduire que :

$$\forall m \geqslant n+1,\ \frac{1}{(p-1)}\left[\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(m+1)^{p-1}}\right] - \frac{1}{n^p} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^p} \leqslant \frac{1}{(p-1)}\left[\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(m+1)^{p-1}}\right] - \frac{1}{(m+1)^p}$$

Puis que : $\dfrac{1}{(p-1)}\dfrac{1}{n^{p-1}} - \dfrac{1}{n^p} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \leqslant \frac{1}{(p-1)}\frac{1}{n^{p-1}}$

2)

a) En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ et en passant par les sommes partielles, montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$, $n \geqslant 1$ converge et déterminer sa somme

b) On note $U = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$. Montrer que : $S = \dfrac{1}{2}(U+3)$

c) En remarquant que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)^4} \leqslant \dfrac{1}{k^2(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^4}$ et en utilisant III 1)c), donner un encadrement de $U - U_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant U_n + \dfrac{1}{3n^3} - U \leqslant \dfrac{2}{n^4}$. Pour quelle valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on une valeur approchée de S à 10^{-4} près ?

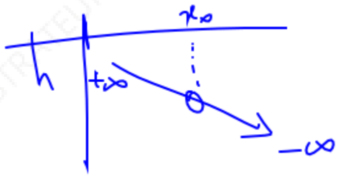
I) 1) a) m1 : $x < y \Rightarrow \Lambda(x) < \Lambda(y)$ $\Rightarrow \Lambda \nearrow$ strict^t

m2 composit$^{\circ}$ de f° $\Rightarrow \Lambda \nearrow$ strict^t

$\Lambda \circ L = Id$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}\ L(\Lambda(x)) = \dots = x$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \Lambda'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

c) Idée : poser $h : x \mapsto \Lambda(x) - x$



$\exists!\, x_0 \in \mathbb{R}\ h(x_0) = 0$

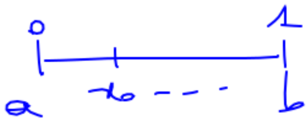
ie $\Lambda(x_0) = x_0$

d) 1re piste : TAF $\to \Lambda$ $\quad |\Lambda'| \leq 1 \dots$

$|\Lambda(x) - \underbrace{\Lambda(x_0)}_{x_0}| \leq |x - x_0|$

2e piste : IAF sur h ...

2) $a = 0$, $b = 1$ $\longrightarrow$

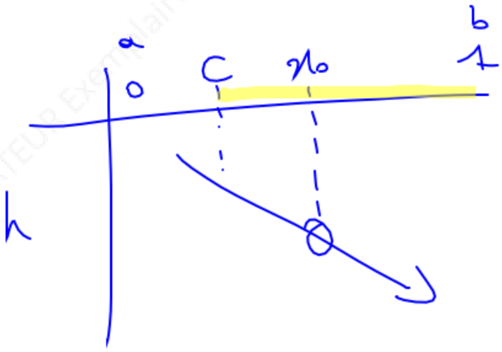


Λ à valeurs dans $]0,1[$

$\underbrace{\Lambda(x_0)}_{=\, x_0} \in\,]0,1[$

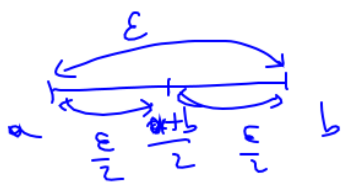
$x_0 \in\,]0,1[$

$\Lambda(c) > c$



$h(c) \geq 0 \iff \Lambda(c) - c \geq 0$

$\iff \Lambda(c) > c$



$$\frac{\varepsilon}{2} \leq 10^{-4} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 2 \times 10^{-4}}$$

1) $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ n racine de $\mathbb{C}$ $\alpha_1 \dots \alpha_n$

$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

$\underline{\text{dm}}$ $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n)$

et en développant le membre de droite

$= a_n \Big[(-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n + X \big[(-1)^{n-1} \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n + (-1)^{n-1} \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n + \dots + (-1)^{n-1} \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} + \dots \big] \dots + X^{n-1} \big[(-1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \big] + X^n \Big]$

$= a_n \Big[(-1)^n \prod_{i=1}^{n} \alpha_i + X \Big((-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{n-1}} \Big) + \dots + X^k \Big((-1)^{n-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{n-k}} \Big) + \dots + X^{n-1} \Big((-1) \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \alpha_{i_1} \Big) + X^n \Big]$

2 pl égaux ssi coef égaux donc par identif :

$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad a_{n-k} = a_n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}$ et $\hat{c}$ $\underline{a_n \neq 0}$.

$\Rightarrow \boxed{\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}}$

$$a_n (X - z_1)(X - z_2) \cdots (X - z_n)$$

$$= a_n \Big[X^n + X^{n-1} \underbrace{(-z_1 - z_2 \cdots - z_n)}_{-\sum_{i=1}^{n} z_i}$$

$$(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$$

$$= X^3 + (-z_1 X^2 - z_2 X^2 - z_3 X^2)$$

$$+ X\big((-z_1)(-z_2) + (-z_1)(-z_3) + (-z_2)(-z_3)\big]$$

$$+ (-1)^3 z_1 z_2 z_3$$

$$= X^3 + X^2 \left(\sum_{i=1}^{3} z_i \right) + \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} z_i z_j \right) X + (-1)^3 \prod_{i=1}^{3} z_i$$

$$\underbrace{\text{Coef } X^{n-1}}_{\downarrow \; a_{n-1}} : -a_n \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \right)$$

$$a_{n-1} \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} z_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}$$