BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 282

Conception : HEC Paris – ESSEC BS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 30 avril 2019, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème comporte cinq parties.
Dans les trois premières parties, on étudie des propriétés usuelles des matrices ${}^tAA$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$.
Dans la quatrième partie, on définit la racine carrée d'une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives, afin d'obtenir une décomposition d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
Dans la cinquième partie, on applique ce qui précède au calcul de la distance d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ à l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- $B_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on lui associe la matrice

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

de ses coordonnées dans la base B_0.

- $< \mid >$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne qui lui est associée est notée $\| \ \|$.
- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne sa transposée et $\mathrm{tr}\, A$ désigne sa trace.
- I_n désigne la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

• **Endomorphisme adjoint** Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on note f^* l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice ${}^tA$. On notera aussi $s_f = f^* \circ f$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice ${}^tAA$.

• Si λ est un nombre réel, on définit

$$\mathrm{E}_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n).$$

• **Liste étendue des valeurs propres** Lorsqu'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, on appelle liste étendue des valeurs propres de A, une liste de nombres réels où chaque valeur propre λ de A se trouve répétée $\dim \mathrm{E}_\lambda(A)$ fois. Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

admet $(1, 4, 4)$ pour liste étendue des valeurs propres.

• $S(\mathbb{R}^n)$ (respectivement $S_n(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (respectivement des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$).

• $S^+(\mathbb{R}^n)$ (respectivement $S_n^+(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (respectivement des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$) à valeurs propres positives ou nulles.

• On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$. Si $P \in M_n(\mathbb{R})$, on rappelle que P est une matrice orthogonale si P est inversible et si $P^{-1} = {}^tP$.

• **Matrices définies par bloc** Considérons $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $(A, B) \in \left(M_n(\mathbb{R})\right)^2$ définies par

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix},$$

où

$$(A_1, B_1) \in \left(M_r(\mathbb{R})\right)^2 \quad ; \quad (A_4, B_4) \in \left(M_{n-r}(\mathbb{R})\right)^2,$$

et

$$(A_2, B_2) \in \left(M_{r,n-r}(\mathbb{R})\right)^2 \quad ; \quad (A_3, B_3) \in \left(M_{n-r,r}(\mathbb{R})\right)^2.$$

On utilisera sans démonstration les égalités suivantes

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tA = \begin{bmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_3 \\ {}^tA_2 & {}^tA_4 \end{bmatrix}.$$

Partie I - Un premier exemple

Soit a un réel différent de 1 et

$$A = \frac{1}{1-a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

revoir rédac

1) Quel est le rang de A ? Calculer A^2. Que peut-on dire de l'endomorphisme f canoniquement associé à A ? Est-ce un endomorphisme diagonalisable ? Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ?

Oui

2) Calculer $M = {}^tAA$. La matrice M est-elle diagonalisable ? Comparer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}(s_f)$. Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de s_f ?

3) À quelle condition nécessaire et suffisante, M est-elle la matrice d'un projecteur ?

Partie II - Généralités

4) Produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$

a - Soit

$$A = \left[a_{ij}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \quad \text{et} \quad B = \left[b_{ij}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Donner l'expression de $\mathrm{tr}({}^tAB)$ en fonction des coefficients de A et de B.

b - Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite du problème, on notera

$$(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB) \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$$

la norme euclidienne associée.

c - Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis vérifier que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{tr}\, A^2 \leqslant \mathrm{tr}({}^tAA).$$

Montrer également que

$$\mathrm{tr}\, A^2 = \mathrm{tr}({}^tAA) \quad \Leftrightarrow \quad A \in S_n(\mathbb{R}).$$

Dans la suite, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A.

5) Caractérisation de la matrice de f^* en base orthonormée

Soit $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on note P la matrice de passage de B_0 vers B' et A' la matrice de f dans la base B'.

a - Rappeler la relation liant A et A'.

b - Rappeler pourquoi P est une matrice orthogonale.

c - En déduire que ${}^tA'$ est la matrice de f^* dans la base B'.

6) Réduction de s_f

a - Vérifier que, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX({}^tAA)X = \|AX\|^2$.

b - Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(s_f)$ et $\mathrm{rg}(s_f) = \mathrm{rg}\, f$.

c - Vérifier que s_f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.

d - Montrer que les valeurs propres de s_f sont positives ou nulles.

On note $r = \mathrm{rg}\, f$ et on suppose pour la fin de la question 6) que $1 \leqslant r \leqslant n-1$.

e - Justifier qu'il existe une base orthonormée $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \dots \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de s_f est de la forme

$$\begin{bmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix},$$

où D est une matrice diagonale d'ordre r dont les éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont strictement positifs et où $0_{r,n-r}, 0_{n-r,r}$ et $0_{n-r,n-r}$ sont des matrices dont tous les coefficients sont nuls.

f- Montrer que la matrice de f dans la base C est de la forme

$$\mathrm{Mat}_C(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix},$$

où $A_1 \in M_r(\mathbb{R})$ et $A_3 \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$. Vérifier que ${}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D$.

7) Étude des valeurs propres de $A{}^tA$

On note $\tau_f = f \circ f^*$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A{}^tA$.

? a - Montrer que $\mathrm{rg}(s_f) = \mathrm{rg}(\tau_f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(s_f)) = \dim(\mathrm{Ker}(\tau_f))$.

b - Soit λ une valeur propre strictement positive de s_f et x un vecteur propre associé. Vérifier que λ est une valeur propre de τ_f et que $f(x)$ en est un vecteur propre associé. Montrer alors que

$$\dim(\mathrm{E}_\lambda(s_f)) \leqslant \dim(\mathrm{E}_\lambda(\tau_f)).$$

?

Tournez la page S.V.P.

c - Montrer que τ_f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, qu'il possède exactement les mêmes valeurs propres que s_f et que, pour chacune de ces valeurs propres λ, on a

$$\dim(\mathrm{E}_\lambda(s_f)) = \dim(\mathrm{E}_\lambda(\tau_f)).$$

d - En déduire enfin qu'il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A{}^tA = \Omega({}^tAA){}^t\Omega$.

8) Une inégalité

Dans cette question, on note

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n\} \quad \text{et} \quad U = \{(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n\},$$

et φ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

On admet que V est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

a - Montrer que

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$$

est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.

b - En déduire que φ admet un maximum global noté M sur W.

c - Calculer $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ lorsque $(x_1, \dots, x_n) \in V \setminus U$.

d - En déduire que M est le maximum de φ sur U sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = 1$.

e - Déterminer alors la valeur du maximum M et préciser en quel vecteur de U il est atteint.

f - Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de S sont positives ou nulles et on note $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ une liste étendue des valeurs propres de S. Déduire de ce qui précède que

oui

$$\prod_{i=1}^{n} \mu_i \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr} S}{n}\right)^n.$$

Dans quel cas a-t-on égalité dans cette inégalité ?

g - Dans cette question, on note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de ${}^tAA$. On définit l'application Δ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Delta(x) = \prod_{i=1}^{n}(x + \lambda_i).$$

Montrer alors que pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$\Delta(x) \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr}(xI_n + {}^tAA)}{n}\right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n}\right)^n.$$

Partie III - Étude de deux cas particuliers

Dans cette partie encore, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A.

9) On suppose dans cette question que f est un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$.

a - Montrer que la trace de toute matrice représentant l'endomorphisme f est r.

b - On reprend les notations de la question 6) selon lesquelles

$$\mathrm{Mat}_C(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix}.$$

Vérifier que $A_1^2 = A_1$ et que $\mathrm{tr}(A_1) = r$, et en déduire la matrice A_1.

c - Montrer alors que les valeurs propres non nulles de ${}^tAA$ sont supérieures ou égales à 1 et que $\mathrm{tr}({}^tAA) \geqslant r$.

d - Quels sont les projecteurs orthogonaux pour lesquels $\mathrm{tr}({}^tAA) = r$?

10) On suppose dans cette question que f est une symétrie, c'est-à-dire $f^2 = \mathrm{Id}$.

a. Justifier que ${}^tAA$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et de ${}^tA$.

b - Montrer que si λ est une valeur propre de ${}^tAA$, alors $1/\lambda$ est aussi une valeur propre de ${}^tAA$ et que

$$\dim \mathrm{E}_\lambda({}^tAA) = \dim \mathrm{E}_{1/\lambda}({}^tAA).$$

c - Vérifier que pour tout x réel strictement positif on a

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

puis établir l'équivalence logique

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

d - On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de ${}^tAA$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \geqslant 2^n.$$

e - Quelles sont les matrices pour lesquelles $\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = 2^n$? Montrer que cette égalité correspond au cas où f est une symétrie orthogonale, ce qui signifie que les sous-espaces $\mathrm{E}_1(f)$ et $\mathrm{E}_{-1}(f)$ sont orthogonaux.

Partie IV - Décomposition polaire

Dans cette partie encore, $A \in M_n(\mathbb{R})$, f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A et on suppose de plus que A est inversible.

11) Montrer qu'il existe une base orthonormée $C = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et n réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tels que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i,$$

et on pose alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\,\varepsilon_i.$$

Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$.

12) Soit w un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $w \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $w^2 = s_f$.

Montrer que, pour toute valeur propre μ de w, on a $\mathrm{E}_\mu(w) \subset \mathrm{E}_{\mu^2}(s_f)$, et montrer ensuite que

$$\mathrm{E}_\mu(w) = \mathrm{E}_{\mu^2}(s_f) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}(w) = \left\{ \sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(s_f) \right\}.$$

13) En déduire qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$ et que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f, la matrice de v est diagonale.

14) En déduire qu'il existe une unique matrice notée $\sqrt{{}^tAA}$ appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\left(\sqrt{{}^tAA}\right)^2 = {}^tAA$.

15) Vérifier que la matrice $A\left(\sqrt{{}^tAA}\right)^{-1}$ est orthogonale. Montrer alors qu'il existe un unique couple

$$(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$$

tel que $A = \Omega S$. C'est ce que l'on appelle la décomposition polaire de A.

Partie V - Application à la distance d'une matrice inversible à l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, A est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $d(M)$ la distance de M à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$d(M) = \inf_{V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|M - V\|_2.$$

16) Justifier que $d(M)$ est bien définie.

17) Soit $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\forall N \in M_n(\mathbb{R}), \qquad \|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2.$$

Montrer que les applications $V \mapsto VR^{-1}$ et $V \mapsto R^{-1}V$ sont des bijections de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même. En déduire que

$$d(M) = d(RM) = d(MR).$$

18) On note $A = \Omega S$ la décomposition polaire de A. On considère une matrice diagonale D à éléments diagonaux strictement positifs et une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$S = PD\,{}^tP.$$

Vérifier que $d(A) = d(D)$.

19) Soit $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On note

$$W = \frac{1}{2}(V + {}^tV),$$

et v l'endomorphisme canoniquement associé à V.

a - Justifier que W est diagonalisable. On note w l'endomorphisme canoniquement associé à W.

b - Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $< w(x) \mid x > = < v(x) \mid x >$ et que $\|v(x)\| = \|x\|$. En déduire que

$$|< w(x) \mid x >| \leqslant \|x\|^2 \quad \text{et} \quad < x - w(x) \mid x > \geqslant 0.$$

c - Montrer alors que les valeurs propres de $I_n - W$ sont positives ou nulles.

d - On note $W = \left[w_{ij}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Montrer aussi que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $1 - w_{ii} \geqslant 0$.

e - Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $w_{ii} = 1$ si, et seulement si, $W = I_n$.

20) On conserve les notations des questions 18) et 19).

a - Montrer que

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2\,(\,I_n - V \mid D\,) = 2\,(\,I_n - W \mid D\,).$$

b - En déduire que

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 \geqslant 0.$$

c - Montrer alors que

$$d(A) = \|D - I_n\|_2 = \|\sqrt{{}^tAA} - I_n\|_2,$$

et montrer aussi que I_n est l'unique élément V de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $d(A) = \|D - V\|_2$.