Compte-rendu de séance

MERCREDI 11 AVRIL 2018 9:28 3H56

Mathématiques - ECS2 - FA - Maths - Séance 21 - Synthèse

SÉANCE WEBINAR

Responsable de la séance

Olivier SARFATI - PROF PROFESSEUR

Exemplaire de ECE2-ECS2 FA 2017-18 - ETUDIANT

Publié le 18/09/2018

79	“	Document Problème de synthèse - espérance totale et matrice de variance-covariance.pdf (02:41:41)
87	“	Enoncé libre Webcam_antoine_2018-04-11_12-12-58.png (02:44:15)
88	“	Enoncé libre Webcam_Lucas_2018-04-11_12-19-49.png (02:51:05)
89	“	Enoncé libre Webcam_thomas_2018-04-11_12-24-33.png (02:55:49)
90	“	Document Bili - minimisation et proj orth I correc Olivier.pdf (03:13:23)
96	“	Enoncé libre Webcam_Guillaume_2018-04-11_12-49-06.png (03:20:23)
97	“	Enoncé libre Webcam_Guillaume_2018-04-11_12-49-32.png (03:20:49)

myPRΣPA

REVISIONS GENERALES – ECS

Hors densités, estimation, bilinéaire, n variables et Scilab

QUELQUES GRANDS CLASSIQUES DU CALCUL

SOMMATIONS :

1) méthode pour calculer les sommes $\sum k\binom{n}{k}, \sum k^2\binom{n}{k}, \sum_k \binom{k}{p}$

2) ESSEC 2009 : Donner une expression de $\sum_{k=0}^{n} kx^k$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3) HEC 2005 E2:

2. Soit (n,r) un couple d'entiers naturels, tels que $1 \leqslant r \leqslant n$. Pour tout réel x de $]0,1[$, on définit la fonction $f_{r,n}$ par :

$$f_{r,n}(x) = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k$$

a) Montrer, pour tout réel x de $]0,1[$, l'égalité : $(1-x)f_{r,n}(x) = xf_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r}x^{n+1}$.

b) On suppose l'entier r fixé. Montrer, lorsque n tend vers $+\infty$, l'équivalence : $\binom{n}{r} \sim \frac{n^r}{r!}$.

4) EDHEC 1996 : Soit B une matrice involutive c'est-à-dire vérifiant $B^2 = I$. Soit $A = 2I + B$.
Calculer, pour tout entier naturel n, A^n en fonction de I et B.

5) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

6) ESSEC 1996 S : Calculer $\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$

INEQUATIONS :

1. Montrer que $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad e^x \geq 1+x$
3. HEC 2008 E3 - Montrer que : $\forall (p,q) \in]0,1[,\quad \frac{pqe^x}{(pe^x+q)^2} \leq \frac{1}{4}$
4. ECRICOME 2005 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$
5. ESCP 2000 : Montrer que $\binom{2n+2}{n+1} \leq 4^{n+1}$
6. ESCP 1986 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$
7. Montrer que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\quad \frac{2}{\pi}t \leq \sin t$.

8. Montrer que $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^a+e^b}{2}$

9. Montrer que pour tout $n\geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$

LIMITES, EQUIVALENTS...

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$

2. Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$

3. Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit (u_n) la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lfloor kx\rfloor$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$

4. Soit w la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*, w_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n$.

ANALYSE

SUITES

1. HEC 1999 :

Soit C un réel strictement positif. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta < \frac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit $\mathbb{N}$. Pour tout n, on note $u_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.
On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$(1)\qquad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}(\Delta)-u_n(\Delta) = C.\Delta.(1-u_n(\Delta))$$

On pose : $u_0(\Delta) = \frac{1}{N}$.
1) Déterminer l'expression de $u_n(\Delta)$ et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(\Delta)$.
2) Soit t un réel fixé strictement positif. Le rapport $\frac{t}{\Delta}$ sera également noté t/Δ.
a) Comparer $[\frac{t}{\Delta}]\Delta$, t et $\left([\frac{t}{\Delta}]+1\right)\Delta$. Déterminer $\displaystyle\lim_{\Delta\to 0}\Delta[\frac{t}{\Delta}]$.
b) Déterminer $\displaystyle\lim_{\Delta\to 0} u_{[t/\Delta]}(\Delta)$.

2. Un grand classique « caché » : Soit u la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$. En considérant le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, déterminer la limite de la suite (u_n).

3. EML 1995 :

Soit $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x\ln(1+x)$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in\ ]0;+\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. ESSEC 2002 :

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une et une seule racine réelle appartenant à $]0, 1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2.

b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/2, 1]$.

c) Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$:

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

d) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Prouver l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

5. HEC 1991 :

Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on considère la fonction polynomiale P_n définie par la relation :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - a$$

1. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution positive et une seule, que l'on notera x_n. Montrer que $x_n \leq a$.

2. Étudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est monotone.

3. **Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note ℓ sa limite. Prouver que $0 \leq \ell < 1$.**

4. **Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n, le nombre x_n est solution de l'équation :**

$$x^{n+1} - (a+1)\,x + a = 0$$

En déduire que : $\quad \ell = \dfrac{a}{a+1}$

SERIES NUMERIQUES :

1. Etudier la nature des séries suivantes :

1.1. $\sum \dfrac{1}{k^3 + 2^k}$

1.2. $\sum \dfrac{1}{k^2 - k}$

1.3. $\sum \dfrac{\ln k}{e^k}$

1.4. $\sum_n n^\alpha x^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}, x \in]-1, 1[$

2. En admettant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

3. Un classique :

3.1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

3.2. En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et déterminer sa somme.

4. ESCP 1995 : Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^{p+4}} \leq \frac{1}{(p+3)\left(n-\frac{1}{2}\right)^{p+3}}$.

ETUDE DE FONCTIONS – CONTINUITE - DERIVABILITE

1. HEC 1996 S : Soit P_n un polynôme de degré $2n$ qui vérifie : $\forall j \in \{0,\ldots,n-1\}$, $P_n^{(j)}(-1) = P_n^{(j)}(1) = 0$

   Montrer que $P_n^{(n)}$ admet exactement n racines et que celles-ci appartiennent à $]-1,1[$.

2. Fonction définie par une intégrale

   On se propose d'étudier l'application F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\,dt.$$

   1) Montrer que F est décroissante sur $\mathbb{R}^+$
   2) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   3) Dérivabilité de F

   On pose, pour $x_0 \in \mathbb{R}^+$, $\quad H(x_0) = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x_0 \sin t} \sin t\,dt$.

   a) Montrer que :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{x_0\}, \quad \left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - H(x_0)\right| \leq \frac{\pi}{8}|x-x_0|.$$

   b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer sa dérivée.

3. ESSEC 2010 S :

   Soit a un réel strictement positif. Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,dt = \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!}\left(x^k - 1\right)$$

   (On pourra utiliser une inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $t \mapsto e^{-at}$)

INTEGRATION

1. HEC 1996 : pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}$, $W(p,q)=\int_{-1}^{1}(t-1)^p(t+1)^q\,dt$

   Montrer que pour tout $n\geq 2$: $W(n,n)=(-1)^n\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

2. HEC 2014 S1 – Intégrales impropres

a)

Pour tout couple $(r,s)\in\mathbb{N}^2$, montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^r(\ln x)^s\,dx$ est convergente.

(on pourra utiliser le changement de variable $u=-\ln x$ après avoir justifié précisément sa validité)

b)

Établir pour tout couple $(r,s)\in\mathbb{N}^2$, l'égalité : $\int_0^1 x^r(\ln x)^s\,dx=\dfrac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}$.

3. Une intégrale à connaître par cœur

   Calculer : $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n\,dt$

4. ESSEC 1997 E3

L'objet de ce problème est l'étude des racines réelles du polynôme P_n défini pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel x par:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+ \dots +\frac{x^n}{n!}.$$

1°) Etude de P_n pour $n\leq 3$.
Etudier les variations et tracer sur une même figure (avec pour unité: 2centimètres) les courbes représentatives des polynômes P_n pour n = 0, 1, 2, 3.

2°) Comparaison de exp(x) et $P_n(x)$.
a) Etablir que $P_n(x)\leq \exp(x)$ pour tout entier naturel n et tout réel positif x.
b) Etablir que $P_{2n+1}(x) \leq \exp(x) \leq P_{2n}(x)$ pour tout entier naturel n et tout réel négatif x *(on pourra par exemple raisonner par récurrence)* .

myPRΣPA

ALGEBRE

UN PEU DE COMPLEXES

1. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $\arg(z)=\frac{\pi}{4}$ et $z'=-3$. Calculer $\arg(zz')$.
2. Soit $z=\cos(\alpha)e^{i\theta}$ avec $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$. Calculer $|z|$ et $\arg(z)$.
3. Soit $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ avec $n\in\mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de n, le nombre z est-il réel ?
4. Soient deux nombres complexes z et z' tels que $|z|=|z'|=1$ et $zz'\neq-1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}$.

POLYNOMES

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-2)(X-1)^2$.
2) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n}-1$ pour n entier supérieur ou égal à 2
3) Trouver tous les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(X+1)-P(X)=0$
4) Soit $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ avec $a_n\neq0$. Soit $P\in\mathbb{C}_n[X]$ tel que $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$. On pose $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ les n racines complexes de P.

   Montrer que $\forall k\in\{1,2,\dots,n\}$, $\sum_{1\le i_1<i_2\dots<i_k\le n}\left[\prod_{j=1}^{k}\lambda_{i_j}\right]=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$ puis que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et

   $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$.

MATRICES

1) Une matrice à connaître

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont le terme général s'écrit $a_{p,q}=e^{2i\pi pq/n}$ pour $(p,q)\in[\![1,n]\!]^2$. Calculer $A\overline{A}$. Que peut-on en déduire?

2) HEC 2007 : autour des matrices nilpotentes

5. On considère dans cette question, une matrice non nulle N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété suivante : il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $N^p=0$ et $N^{p-1}\neq0$.

a) Montrer que la série $\sum_{k\geq0}\frac{1}{k!}N^k$ converge. On note $M=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}N^k$. $= \sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{k!}N^k$

b) Montrer que $\underbrace{\{X\in\mathbb{R}^n/(M-I)X=0\}}_{E}=\underbrace{\{X\in\mathbb{R}^n/NX=0\}}_{F}$.

APPLICATIONS LINEAIRES

1. EDHEC 1994 :

Dans cet exercice, une suite réelle peut être désignée indifferemment par l'une ou l'autre des notations u ou $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
On étudie un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles à indices dans $\mathbf{N}$:

$$\mathcal{E} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} / \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n\right\}$$

1) Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension 3. (On pourra éventuellement considérer l'application linéaire φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathbf{R}^3$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$.)
2) Montrer que si l'on pose : $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n = \frac{1}{2^n}, \quad b_n = \frac{n}{2^n}, \quad c_n = \frac{n^2}{2^n}$ les trois suites a, b, c forment une base de $\mathcal{E}$.
3) Montrer que si u appartient à $\mathcal{E}$, la série de terme général u_n est convergente. On notera $s(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
4) Calculer $s(a)$, $s(b)$ et $s(c)$.
5) Montrer que $s : u \longmapsto s(u)$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathbf{R}$; quelle est la dimension de Ker s ?
6) Déterminer Ker s.

2. ESSEC 2002 E3 :

a) On associe à toute fonction polynôme P la fonction $\tilde{P}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\tilde{P}(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \quad \text{si } x \neq 1 \quad \text{et} \quad \tilde{P}(1) = P(1).$$

- Montrer que la fonction $x \to \int_1^x P(t)dt$ est une fonction polynôme admettant 1 pour racine.
- Montrer que la fonction $\tilde{P}$ est une fonction polynôme de même degré que P lorsque $P \neq 0$.

b) On considère l'application ϕ associant à toute fonction polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_p[X]$ la fonction polynôme $\tilde{P}$ définie ci-dessus.
Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$. Est-il injectif ? surjectif ?

c) Déterminer les images par ϕ des fonctions polynômes $e_k : x \to x^k$ pour $0 \leq k \leq p$, puis en déduire la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$.

3. NOYAUX ITERES

n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel sur K de dimension n. On note θ l'application linéaire nulle de E. f est un endomorphisme non bijectif de E.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$
2. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dim \operatorname{Ker} f^k$. Montrer que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathbb{N}$.
3. Soit F l'ensemble des entiers naturels k tels que $a_k = a_{k+1}$. Montrer que F n'est pas vide et qu'ainsi F possède un plus petit élément (on pourra raisonner par l'absurde).
4. En déduire l'existence d'un élément p dans $\{1, 2, ..., n\}$ qui vérifie les deux conditions :
   a. $\forall k \in \{1, 2, ..., p-1\}$, $\operatorname{Ker} f^k \neq \operatorname{Ker} f^{k+1}$
   b. $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$.
5. Montrer que : $\forall k \geq p$, $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$.

DIAGONALISATION

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, u = \lambda\, id$

1. Deux propriétés classiques :

1.1 Soit A une matrice d'ordre n n'admettant qu'une seule valeur propre. A est-elle diagonalisable ?

1.2 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u est une homothétie si, et seulement si, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, la famille $(x, u(x))$ est liée. *On pourra considérer la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

2. HEC 1997 : DIAGONALISATION DELICATE... OU PAS !

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix}$.

$AY_2 = \frac{2}{3} Y_2$; $AY_3 = \frac{2}{9} Y_3$

1. On pose $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AY_2 et AY_3 en fonction de Y_2 et Y_3.
2. Montrer que A est diagonalisable. Donner ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.
3. Calculer A^n pour tout entier n.

3. EDHEC 1997 :

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note Δ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Delta(f) = g$, définie par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E.
2) a. Vérifier que, pour toute fonction f de E, $\Delta(f)$ est dérivable.
   b. En déduire que Δ n'est pas surjective.
3) Montrer que Δ est injective.
4) On suppose, *dans cette question*, que Δ possède une valeur propre λ non nulle et on désigne par f un vecteur propre associé à λ.
   a. Montrer que la fonction h, définie pour tout réel x, par $h(x) = f(x)\,e^{-\frac{x}{\lambda}}$, est constante.
   b. Déterminer alors $\Delta(f)$.
5) Conclure à l'aide des questions précédentes que Δ n'a aucune valeur propre.

myPRΣPA

PROBABILITES CLASSIQUES ET VARIABLES DISCRETES

1. HEC 2009 : ESPERANCE ET ANTI-REPARTITION

Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\{1,2,...,N\}$. Etablir les deux relations suivantes :

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{N-1} P([Y>k]) \quad \text{et} \quad E(Y^2)=\sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)P([Y>k])$$

2. HEC 2015 S2 : UN GRAND CLASSIQUE SUR ESPERANCE ET ANTI-REPARTITION

- On note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A})$ qui est, sauf mention contraire, muni de la probabilité P.
- On note S_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_X(x) = P([X > x])$.

6. Dans cette question, on suppose que X est discrète et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Établir pour tout entier naturel n, l'égalité : $\sum_{k=0}^{n} S_X(k) = (n+1)P([X \geqslant n+1]) + \sum_{k=0}^{n} k\,P([X=k])$.

b) En déduire que si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, alors X admet une espérance.

c) Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, et que dans ce cas, on a : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_X(n)$.

3. HEC 1999 :

Soit n et s des entiers supérieurs ou égaux à 2. On considère une urne contenant des boules de couleurs $C_1, C_2, ... C_s$. Les boules de couleurs C_i sont en proportion p_i et on suppose que, pour tout i, $p_i > 0$. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. Pour tout $i \in \{1,2,...,s\}$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules de couleur C_i obtenues à l'issue des n tirages.

1. Donner la loi de X_i, son espérance et sa variance.
2. Soit $(i,j) \in \{1,...,s\}^2$ tel que $i \neq j$. Déterminer la loi de $X_i + X_j$ et sa variance.

4. LOI D'UNE SOMME (EDHEC 1999 E)

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X, Y et Z suivent toutes les trois la loi $\mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$ (c'est-à-dire que : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = P(Y=k) = P(Z=k) = \frac{1}{n}$).

1) a. Montrer que : $\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ P(X+Y=k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.

b. Montrer que : $\forall k \in [\![n+2, 2n]\!],\ P(X+Y=k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.

2) Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que :
$P(X+Y=Z) = \dfrac{n-1}{2n^2}$.

5. LOI DU MIN, LOI DU MAX

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre p. On note $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$.

Déterminer les lois de U et de V.

6. ESSEC 2001 S2

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (on rappelle que $V(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante).
La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))], \text{ ou encore } E(XY) - E(X)E(Y).$$

1°) Covariance des variables aléatoires X et Y

a) Exprimer $\mathrm{Cov}(\lambda X+Y, \lambda X+Y)$ en fonction de $V(\lambda X+Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$V(\lambda X+Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) En déduire que $(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y)$.
A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$?

2°) Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

On suppose dans cette question les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y strictement positives.

a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1, +1]$.
Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

c) On suppose enfin que X suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ et que $Y = X^2$.
Préciser les espérances et les variances de X et Y ainsi que la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y. Etudier alors la réciproque de la question 2°(b).

7. LANCERS DE PIECES : TEMPS D'ATTENTE DE LA PREMIERE SEQUENCE PP ET PF

On dispose d'une pièce donnant pile (P) avec la probabilité p (et $p \in]0,1[$) et face (F) avec la probabilité $q = 1 - p$. On effectue une série de lancers indépendants de cette pièce.
Pour tout entier naturel n non nul, on baptise les évènements et probabilités suivants :

- A_n : « la première séquence PF apparaît au $n-ième$ lancer » et $a_n = P(A_n)$
- B_n : « la première séquence PP apparaît au $n-ième$ lancer » et $b_n = P(B_n)$

Par convention $a_1 = b_1 = 0$.

1. Etude de la première séquence PF

a. Calculer a_2 et a_3.

b. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} p^i q^{n-i}$

c. En déduire une expression simple de a_n en fonction de p, q et n.

d. Montrer que la série de terme général a_n converge et calculer sa somme. Le résultat était-il prévisible ?

2. Etude de la première séquence PP

a. Calculer b_2 et b_3.

b. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $b_n = qb_{n-1} + pqb_{n-2}$

c. Dans cette question, $p = \frac{2}{3}$. Déterminer la valeur de b_n en fonction de n.

myPRΣPA

8. EDHEC 1996 : UNE CHAÎNE DE MARKOV

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe d'origine O ; à chaque instant, il est soit en O (d'abscisse 0), soit en A (d'abscisse 1), soit en B (d'abscisse 2) soit en C (d'abscisse 3)
Les règles de ce "voyage" sont les suivantes :

- Le mobile est en O à l'instant 0.
- Le point O est "réfléchissant", c'est-à-dire que, si à l'instant n le mobile est en O, il est certain qu'à l'instant $(n+1)$ il sera en A.
- Si à l'instant n le mobile est en A, alors à l'instant $(n+1)$, il sera soit en O, soit en B et ceci de façon équiprobable.
- Si à l'instant n le mobile est en B, alors à l'instant $(n+1)$, il sera soit en A, soit en C et ceci de façon équiprobable.
- Le point C est "absorbant", c'est-à-dire que, si à l'instant n le mobile est en C, il est certain qu'à l'instant $(n+1)$ il sera encore en C.

Pour tout entier naturel n :

- On désigne par X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce mobile à l'instant n.
- On appelle M la matrice réelle, carrée d'ordre 4, dont l'élément de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne est $P\left(X_{n+1} = i \middle/ X_n = j\right)$, pour tous i et j appartenant à $\{0, 1, 2, 3\}$.
- On pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice M.
b. Montrer que $U_{n+1} = M\,U_n$.

2) a. Vérifier que 0, 1, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont valeurs propres de M.

b. En déduire l'existence d'une matrice P inversible, qu'on choisira de telle manière que chacune de ses colonnes contienne un nombre maximum de "1", et vérifiant $M = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

c. Vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. Montrer que $M^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter la première colonne de M^n.
(on distinguera les cas $n = 0$ et $n \geq 1$)

e. Préciser U_0 et en déduire, pour tout entier naturel n, la loi de X_n.

Poly

1) $(X-2)(X-1)^2 \neq 0$

$\exists ! (Q, R) \in \dots \quad X^n = Q(X-2)(X-1)^2 + R(X)$

avec $\deg R < 3$

$X^n = (X-2)(X-1)^2 Q(X) + aX^2 + bX + c$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^n = \dots$

$1^n = a + b + c$

$2^n = 4a + 2b + c$

⚠ dériver

$nX^{n-1} = \dots$

$\forall x \quad x \dots$

$x = 1 \quad n \times 1^n = \dots$

$\begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases}$ $\longrightarrow$ on résout le système

3) Posons $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \ P(X+1) - P(X) = 0\}$

Mq $E = \mathbb{R}_0[X]$

- $\mathbb{R}_0[X] \subset E$?

Soit $a \in \mathbb{R}_0[X]$

on a $a - a = 0 \Rightarrow$ ok

- $E \subset \mathbb{R}_0[X]$

Supp $E \not\subset \mathbb{R}_0[X]$

Soit $P \in E$. Supp $\deg P = n$

avec $n \geq 1$

Posons $P = a_n X^n + R(X)$

avec $\deg R < n$

$P(X+1) - P(X) =$

$a_n(X+1)^n - a_n X^n + \dots$

$a_n X^n - a_n X^n + \underbrace{\dots}_{\neq 0}$

$\Rightarrow \deg P(X+1) - P(X)$ ~~…~~ ≥ 0

on ~~…~~ obtient

car $\deg P(X+1) - P(X) = -\infty$

$\deg P \leq 0 \quad P \in \mathbb{R}(X)$

4) $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$

$\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2) \dots (X-\lambda_n)$

$= X^n + X^{n-1}\left[-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n\right]$

$+ X^{n-2}\left[(-1)^2 \lambda_1\lambda_2 + (-1)^2\lambda_1\lambda_3 \dots + (-1)^2\lambda_1\lambda_n\right.$

$+ \lambda_2\lambda_3 \dots + \lambda_2\lambda_n$

$a_{n-1} = a_n(-\lambda_1 - \dots - \lambda_n)$

$\Rightarrow -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

$$X^{n-2}\left[\sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^2 \alpha_i \alpha_j\right]$$

terme cst : $(-\alpha_1)(-\alpha_2)\cdots(-\alpha_n)a_n$

$$\Rightarrow \quad a_0 = a_n(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$\prod_{i=1}^{n}\alpha_i = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Message de : Lucas
Ouais, mais y a pas que ça. J'en ai un peu marre de réviser, j'ai l'impression que rien ne rentre, et que je perçois rien

Message de : Cyril
Pareil j'en ai marre là

Message de : thomas
je suis en forme moi

Message de : Lucas
Bon, avec des petits cas j'arrive à une sorte d'identité

$a_{n-1} = \dots$

$$\Rightarrow \frac{-a_{n-1}}{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

MATRICES

1. $A \in M_n(\mathbb{C})$, $a_{p,q} = e^{2i\pi pq/n}$ pour $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$

TOP!

$$\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2,\ (A\bar{A})_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}\overline{a_{kq}}$$

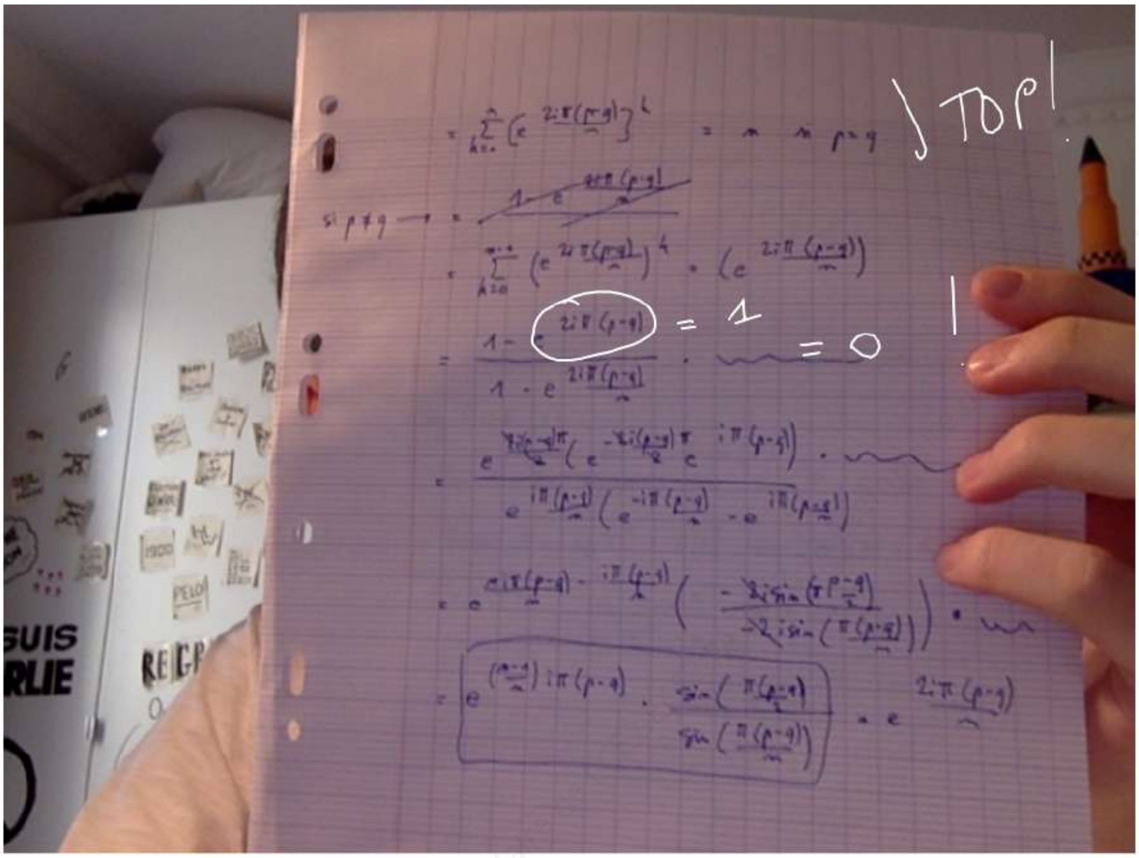
$$= \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi pk/n} \cdot e^{-2i\pi kq/n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2i\pi}{n}[pk-kq]}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{2ik\frac{\pi}{n}[p-q]}$$

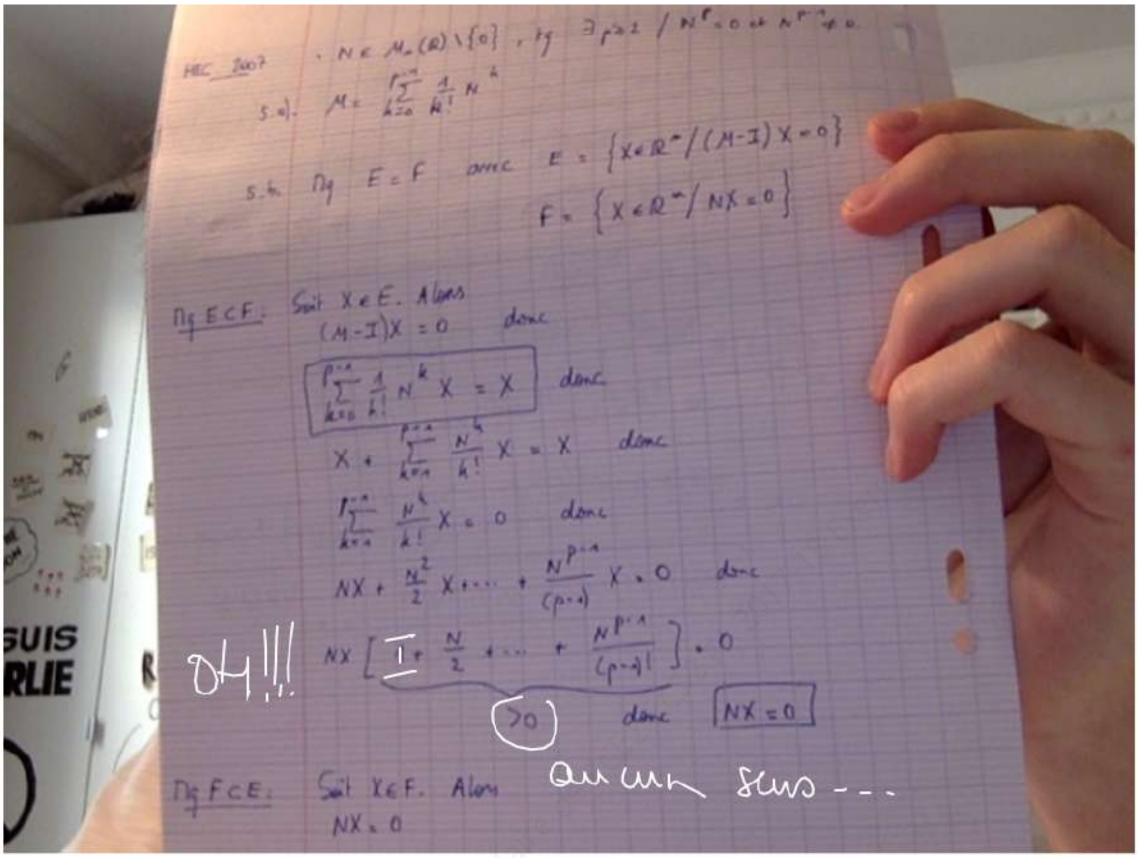
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{2i\pi(p-q)}{n}}\right)^k$$

$$=$$



$$A\bar{A} = n I$$

A inversible et $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{n}\bar{A}}$



HEC 2007 · $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tq $\exists p \geq 2 \,/\, N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$

5.a). $M = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N^k$

5.b. Mq $E = F$ avec $E = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, (M-I)X = 0\}$

$F = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, NX = 0\}$

Mq $E \subset F$: Soit $X \in E$. Alors

$(M-I)X = 0$ donc

$\boxed{\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N^k X = X}$ donc

$X + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{N^k}{k!} X = X$ donc

$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{N^k}{k!} X = 0$ donc

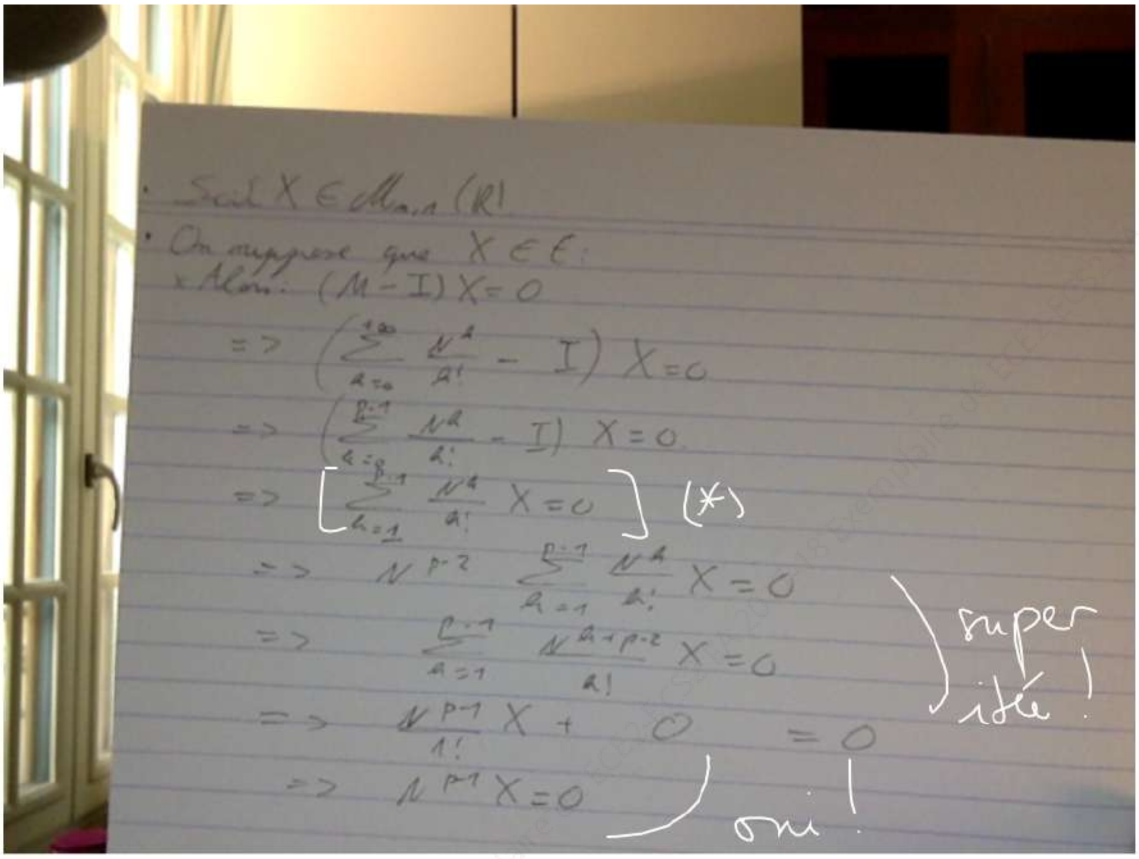
$NX + \frac{N^2}{2} X + \dots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)} X = 0$ donc

OH !!! $NX \underbrace{\left[I + \frac{N}{2} + \dots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} \right]}_{\neq 0} = 0$ donc $\boxed{NX = 0}$

Aucun sens . . .

Mq $F \subset E$: Soit $X \in F$. Alors

$NX = 0$



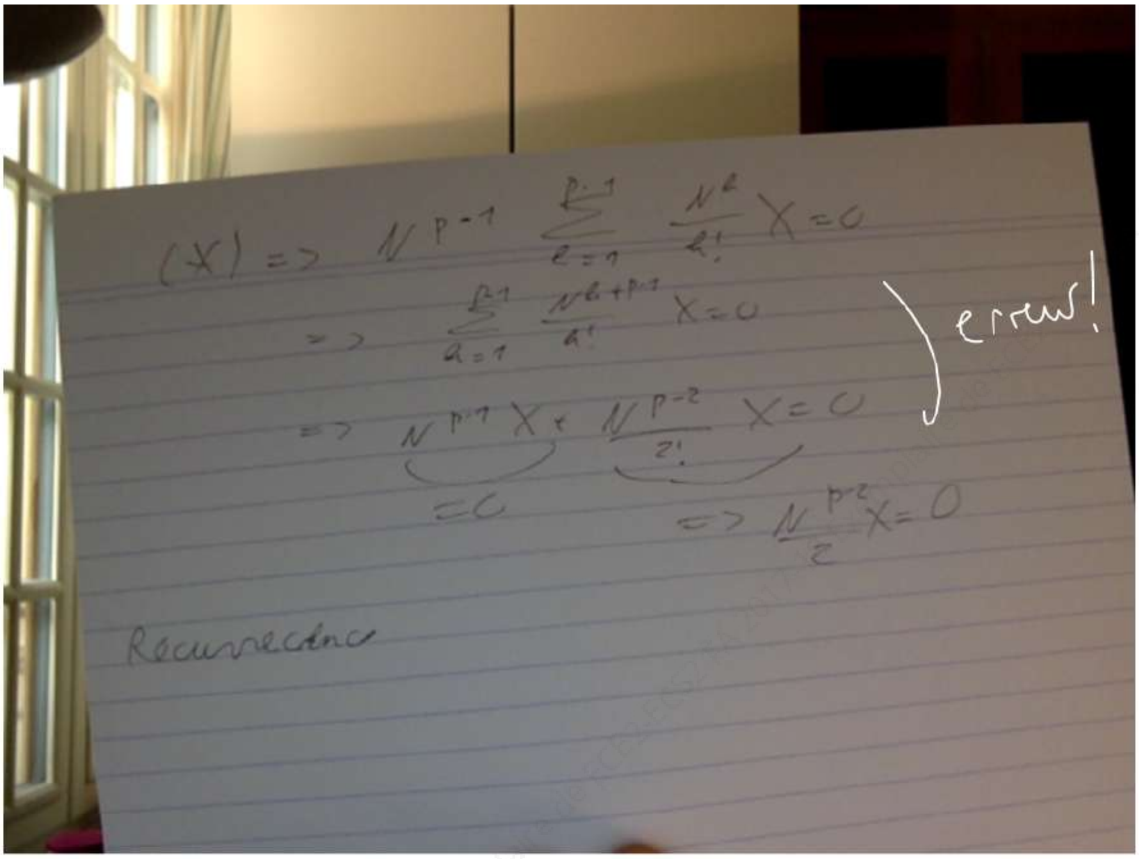
Donc : $(*) \Rightarrow \begin{cases} N^{p-1} X = 0 \\ \sum_{k=1}^{p-2} \frac{1}{k!} N^k X = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} N^{p-1} X = 0 \\ NX + \frac{1}{2!} N^2 X + \dots + \frac{1}{(p-2)!} N^{p-2} X = 0 \end{cases}$

on x

Message de : Lucas
N^p-3

$\begin{cases} N^{p-1} X = 0 \\ N^{p-2} X + \underbrace{\frac{1}{2!} N^{p-1} X + \frac{1}{3!} N^{p} X + \dots + \frac{1}{(p-2)!} N^{p-3+p-2} X}_{=0} = 0 \end{cases}$



ccl : $\forall k \in [\![1,p]\!] \quad N^k X = 0$

$k=1$ $\quad \boxed{NX = 0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} N^{p-1}X = 0 \\ N^{p-2}X = 0 \end{cases}$$

M1 Conjecture descendante ...

M2 : récurrence descendante forte

mq $\forall k \in [\![1, p]\!]$ $N^k X = 0$

init° $k = p \Rightarrow$ évident

hérédité : Soit $k \in [\![2, p]\!]$

Sq $\forall i \in [\![k, p]\!]$, $N^i X = 0$

et mq $N^{k-1} X = 0$

$$(*) \left[\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i!} N^i X = 0\right]$$

$$\overset{HR}{\Rightarrow} \left[\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} N^i X = 0\right]$$

$$\Rightarrow NX + \frac{1}{2!} N^2 X + \dots + \frac{1}{(k-2)!} N^{k-2} X + \frac{1}{(k-1)!} N^{k-1} X = 0$$

$$\text{on} \times N^{k-2} : \quad N^{k-1} X + \underbrace{\text{-----}}_{=0} = 0$$

Edhec 94

1) Mq $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$u \longmapsto (u_0, u_1, u_2)$

Isomorphisme

• Mq φ injective

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ u \in \mathcal{E} \quad \varphi(u) = (0,0,0) \}$

$= \{ u \in \mathcal{E}, \quad u_0 = u_1 = u_2 = 0 \}$

Soit $u \in \operatorname{Ker} \varphi$
rec immédiate ~~triple~~ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 0$

• Mq φ surjective

φ surj ssi $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^3$

ssi $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \; \exists u \in \mathcal{E} /$
$\varphi(u) = (\alpha, \beta, \gamma)$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

posons $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \\ u_2 = \gamma \\ \forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+3} = \frac{3}{2} u_{n+2} - \frac{3}{4} u_{n+1} + \frac{1}{8} u_n \end{cases}$

on a bien construit suite u

Aq $\begin{cases} u \in \mathcal{E} \\ \varphi(u) = (\alpha, \beta, \gamma) \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi$ surjectiv

2) Mq (a, b, c) libre

$\forall n \in \mathbb{N} \; \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n = 0$

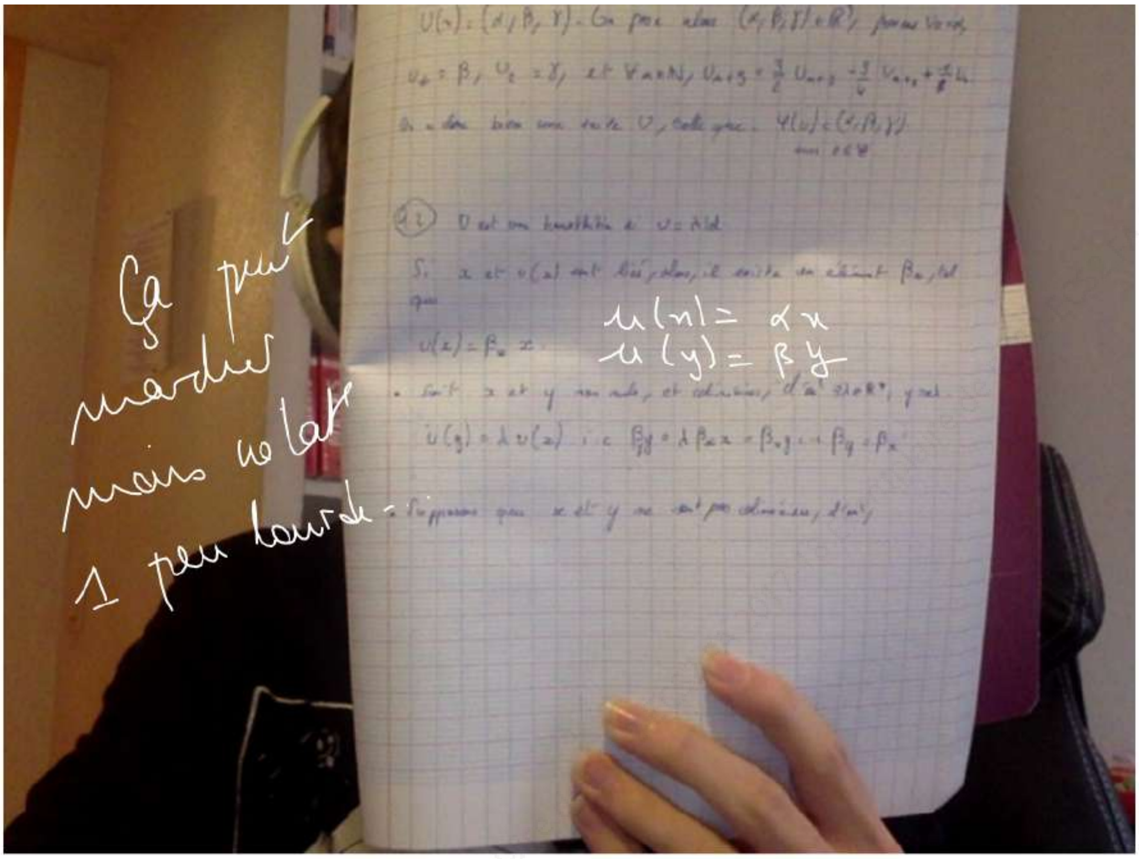
$\begin{cases} n=0 \\ n=1 \\ n=2 \end{cases}$

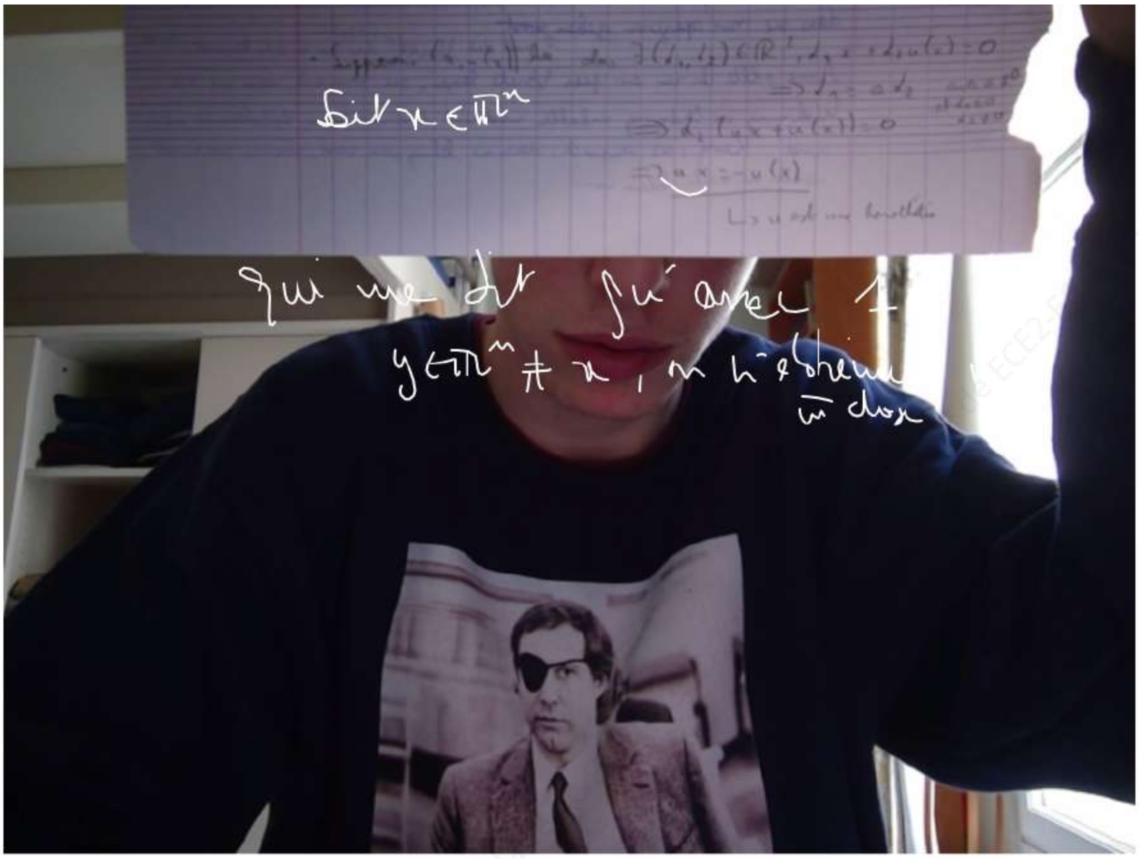
Message de : thomas

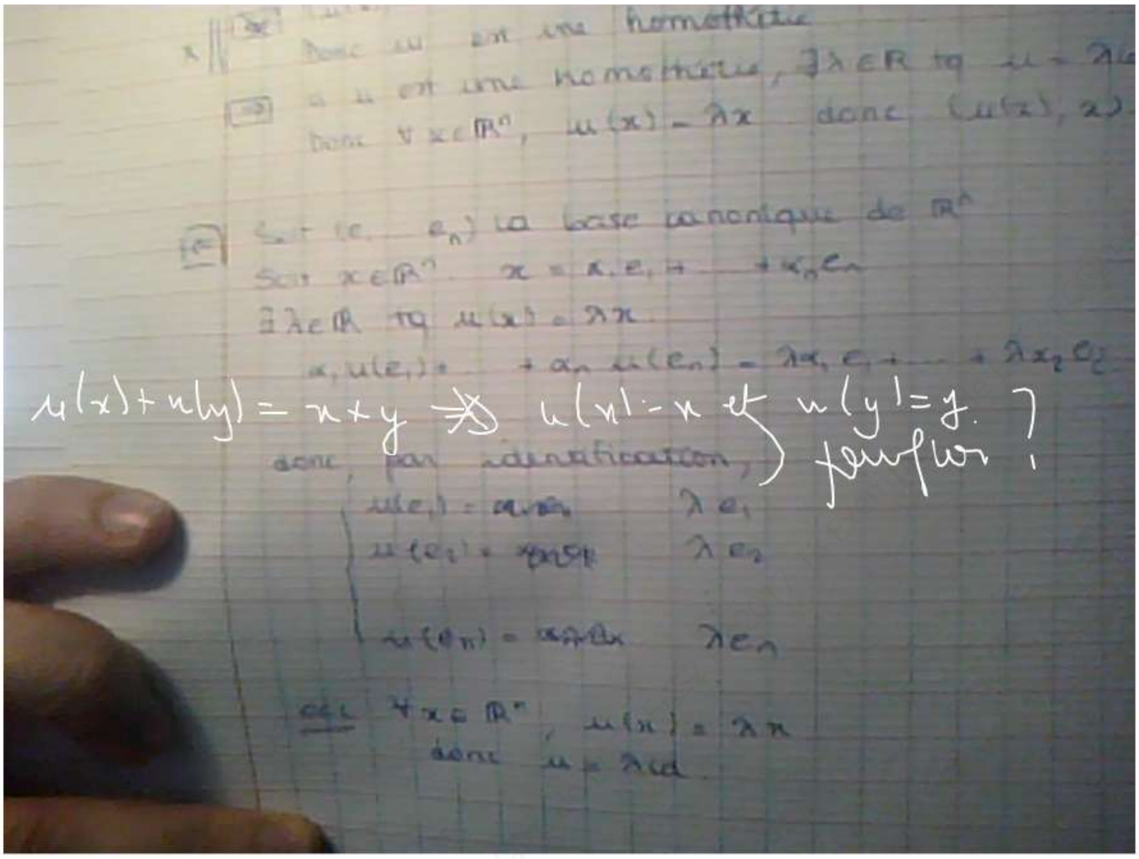
il faut d'abord montrer que an apprtiennet à E

on vérifie $(a, b, c) \in \mathcal{E}^3$

. Si u homothétie :
alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $u = \lambda\, id$
donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $u(x) = \lambda x$
donc $(x, u(x))$ lié


Ça peut marcher mais c'est 1 peu lourd
$u(x) = \alpha x$
$u(y) = \beta y$


Soit $x \in \mathbb{R}^n$
qui me dit qu'avec 1
$y \in \mathbb{R}^n \neq x$, on n'obtient


Donc u est une homothétie
$\Leftarrow$ u est une homothétie, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $u = \lambda$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $u(x) = \lambda x$ donc $(u(x), x)$

Soit $(e_1 \dots e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $u(x) = \lambda x$.
$x_1 u(e_1) + \dots + x_n u(e_n) = \lambda x_1 e_1 + \dots + \lambda x_2 e_2$

$u(x) + u(y) = x + y \not\Rightarrow u(x) = x$ et $u(y) = y$. ? pourquoi ?

donc, par identification,
$u(e_1) = \lambda e_1$
$u(e_2) = \lambda e_2$
$u(e_n) = \lambda e_n$

cel $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $u(x) = \lambda x$
donc $u = \lambda id$

• Sup $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(x, u(x))$ liée

$e_1, u(e_1)$ liée $\Rightarrow \exists \alpha_1$ $u(e_1) = \alpha_1 e_1$

$e_2, u(e_2)$ liée $\Rightarrow \exists \alpha_2$ $u(e_2) = \alpha_2 e_2$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $u(e_i) = \alpha_i e_i$

$\Rightarrow$ u diagonalisable $\to$ diagonale

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \alpha_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

posons :

$x = e_1 + e_2$

$(e_1 + e_2, u(e_1 + e_2))$ liée

$\exists \beta_1 \quad u(e_1 + e_2) = \beta_1 (e_1 + e_2)$

$u(e_1) + u(e_2) = \beta_1 e_1 + \beta_1 e_2$

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \beta_1 e_1 + \beta_1 e_2$

$(\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_1) e_2 = 0$

$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

$e_1 + e_3 \qquad \alpha_1 = \alpha_3$

$\vdots$

HEC 97

1ère approche : $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow 1$ vp de A

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow 1$ ———

2 vect pr libres associés à vp 1

$$\begin{cases} \dim E_{\frac{2}{3}} \geq 1 \\ \dim E_{\frac{2}{9}} \geq 1 \\ \dim E_1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \sum \dim \geq 4$$

or $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim \sum \leq 4$

Donc $E_{\frac{2}{3}} = \mathrm{Vect}(Y_2)$; $E_{\frac{2}{9}} = \mathrm{Vect}(Y_3)$

$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

2e approche : Soit f l'endo de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A :

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc|l} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) & \\ \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \end{array}$$

$f(e_1) = e_1$; $f(e_4) = e_4$

A retenir :

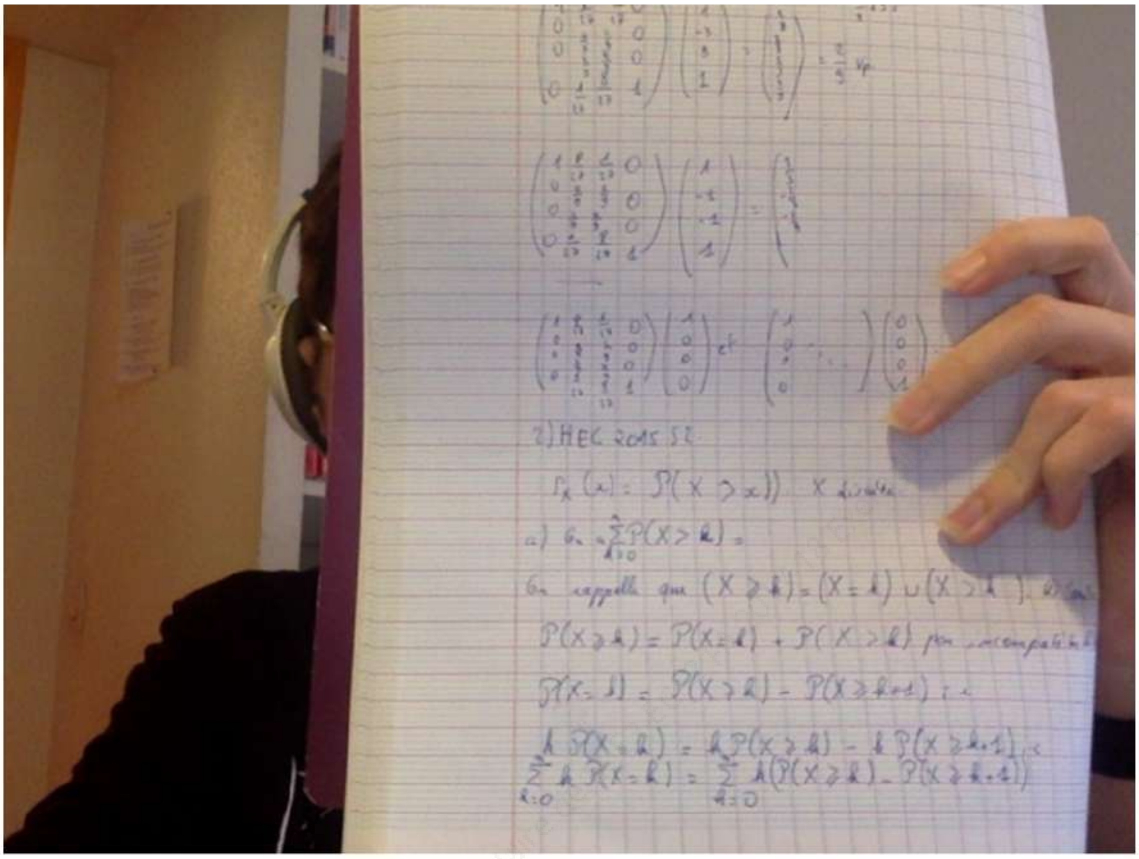
$$A \begin{array}{cc} \begin{array}{c} i^e \text{ colonne} \\ \begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ & \alpha_{i,i} & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} \end{array} & i^e \text{ ligne} \end{array}$$

$\alpha_{i,i}$ vp de A $\quad f(e_i) = \alpha_{i,i} e_i$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{i,i} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \text{ vp de } A$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

4 vp et e_2 vect propre associé



Mq $\sum_{k=0}^{n} k P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} P(X>k) - (n+1) P(X \geq n+1)$

$P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k)$ oui !

Donc $\sum_{k=0}^{n} k[P(X>k-1) - P(X>k)] = \sum_{k=1}^{n} k[P(X>k-1) - P(X>k)]$

$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) P(X>k) - \sum_{k=1}^{n} k P(X>k)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} k P(X>k) + \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - \sum_{k=1}^{n} k P(X>k)$

$= -n P(X>n) + \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k)$

$= -n P(X>n) + \sum_{k=0}^{n} P(X>k) - P(X>n)$

$= \sum_{k=0}^{n} P(X>k) + P(X>n)(-n-1)$

$= \sum_{k=0}^{n} P(X>k) - \underbrace{P(X>n)}_{P(X \geq n+1)}(n+1)$

TOP !

Message de : Benjamin

on pouvait aussi partir de la somme des Sx(k) directement

m2

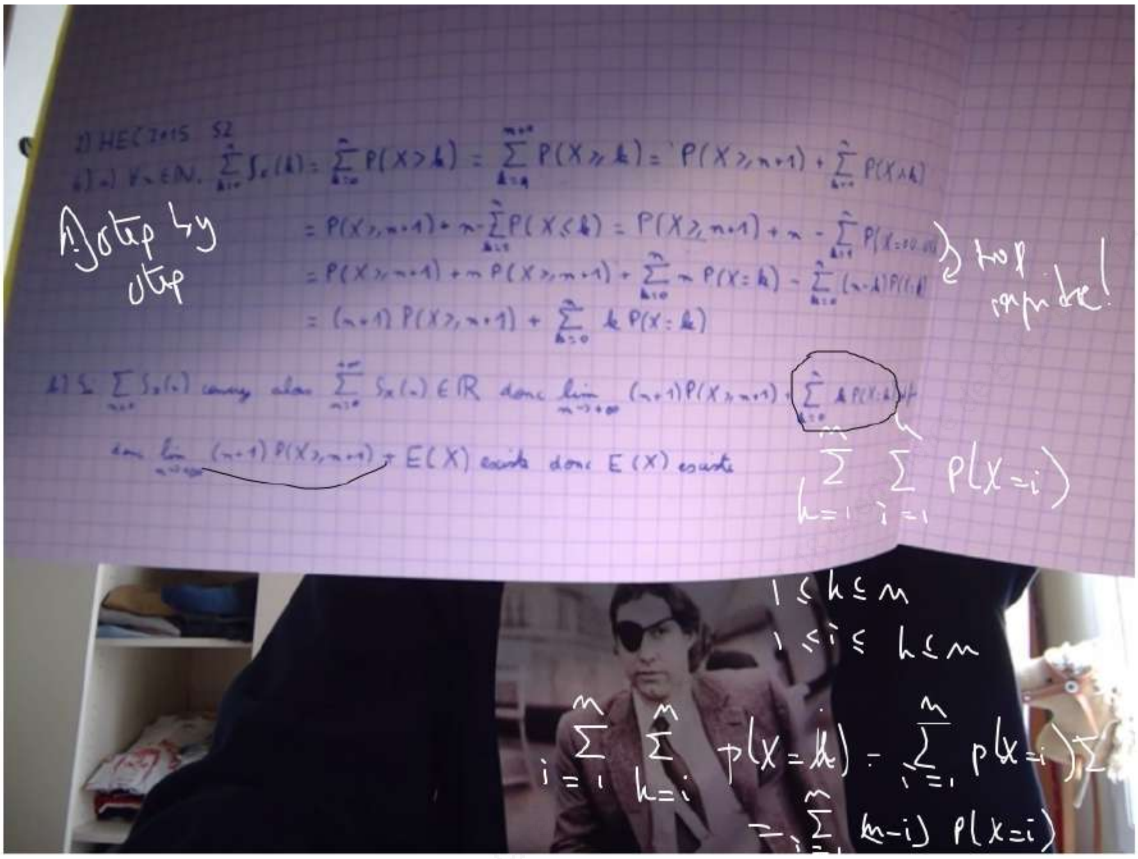
$$\sum_{k=0}^{n} P\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} [X=i]\right) = \sum_{k=0}^{n} 1 - P\left(\bigcup_{i=0}^{k} [X=i]\right)$$

$$= (n+1) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} P(X=i) \qquad 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq i \leq k \leq n$$

$$= (n+1) - \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} P(X=i)$$

$$= (n+1) - \sum_{i=0}^{n} P(X=i)(n-i+1)$$

$$= (n+1) - (n+1) \sum_{k=0}^{n} P(X=i) + \sum_{i=0}^{n} i P(X=i)$$



$\lim (u_n + v_n) = \ell$

$\not\Rightarrow$ u et v cv

$\lim (n - n) = 0$

pourtant $n \to +\infty$ et $-n \to -\infty$

$= [p(X=2) + \dots$

$= [p(X \geq n) \dots]$

$= p(X=1) + 2p(X=2) + \dots + n\,p(X=n) + (n+1)\,p(X \geq n+1)$

$= \sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k) + (n+1)\,p(X \geq n+1)$ $(k=0 \dots)$

a) ii) STG $S_X(n)$ cvg $\Rightarrow$ $\underbrace{(n+1)\,p(X \geq n+1)}_{\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,p(X=k)} + \sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k)$ converge

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} k\,p(X=k)$ existe

~~[illegible]~~ donc X admet une espérance

b) i) X adt $\hat{=}$ STG $S_X(n)$ cvg ? $\boxed{\Leftarrow}$ ok. (cf 6b)

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons X adt ie la STG $k\,p(X=k)$ cvg

$\sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k) = \sum_{k=0}^{n} S_X(k) - (n+1)\,p(X \geq n+1)$

$\downarrow_{+\infty}$ $= \sum_{k=0}^{n} p(X > k) + (n+1)\,p(X < n+1)$

~~$= 1\times p(X=1) + 2\times p(X=2) + \dots + n \times p(\dots) + \dots + \infty\, p(X=\infty)$~~

~~$= \sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k) + (n+1)\,p(X=n+1)$~~

$p(X\geq 0) + p(X\geq 1) + \dots + p(X\geq n)$

$= [p(X=1) + \dots + p(X=n) + p(X\geq n+1)]$

$+ [p(X=2) + \dots + p(X=n) + p(X\geq n+1)]$

$+ \dots + [\underbrace{p(X\geq n)}_{p(X\geq n+1)}]$

ok

Mais rédac' maladroite.

$= 1p(X=1) + 2p(X=2) + \dots + n\,p(X=n) + (n+1)\,p(X\geq n+1)$

$= \sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k) + (n+1)\,p(X\geq n+1)$ $(k=0 \dots)$

$(\dots)$ cvg $\rightarrow \underbrace{(n+1)\,p(X\geq n+1)}_{= \sum_{k=n+1}^{\infty} k\, p(X=k)} + \sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k)$ converge

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} k\,p(X=k)$ existe

- On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_X(k) = \sum_{k=0}^{n} P(X > k)$

et, comme X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X \geq k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P\left(\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} (X=i)\right)$$

et par incompatibilité

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=i)$$

impossible

$$\left(= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i-1} P(X=i)\right.$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} i\,P(X=i)$$

$$= E(X).$$

- $(n+1) P(X \geq n+1) = (n+1) P(X > n) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,P(X=k)$

• e) ~~Supposons q série $S_X(n)$ cv~~

~~$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} S_X(n) = n+1$~~

• X admet une espérance $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)$ cv.

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n} S_X(k) - (n+1)P(X \geq n+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} S_X(k) - nP(X \geq n+1) - P(X \geq n+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} S_X(k) - nP(X \geq n+1) \leq \sum_{k=0}^{n+1} S_X(k)$$

Non ! le th comp' → raisonne simp^t sur terme général !!!

Or, $\sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k)$ ... donc par th de comp. (positif), $\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)$ cv

donc X admet 1 espérance.

D'où $\sum S_X(n)$ converge et vaut $E(X)$ par [illegible]

2) Si $\sum S_X(n)$ converge,

Alors $E(X)$ existe d'après [illegible] et on est ramené au cas 1, on peut déduire $(n+1)P(X>n+1) \xrightarrow[+\infty]{} 0$,

Ainsi $\boxed{E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_X(n)}$

b) • $\sum_{k=0}^{n} k P(X=k) \leq \sum_{k=0}^{n} S_X(k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k) = L$ (cv par hypothèse)

Ainsi $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \ \left(\sum_{k=0}^{n} k P(X=k)\right) \text{ est majoré par } L, \\ \left(\sum_{k=0}^{n} k P(X=k)\right) \text{ croissant} \end{cases}$

TB !

Par le th de la limite monotone $\sum_{k=0}^{n} k P(X=k)$ cv !

c) • cas 1 | Si $E(X)$ admet espérance,

Montrons que $(n+1)P(X \geq n+1)$ converge vers 0.

$$0 \leq (n+1)P(X \geq n+1) = (n+1)\,P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [X=k]\right)$$

$$= (n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k)$$ par incompatibilité des évènements

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,P(X=k)$$ reste série convergente quand $n \to +\infty$ car $E(X)$ existe

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Par encadrement, $\boxed{(n+1)P(X \geq n+1) \xrightarrow[+\infty]{} 0}$,

D'où $\sum S_X(n)$ converge et vaut $E(X)$ par égalité (*)

cas 2 | Si $\sum S_X(n)$ converge,

Alors $E(X)$ existe d'après (b) et on est ramené

... déduire $(n+1)P(X > n+1) \xrightarrow[+\infty]{} 0$,

SUJET DE REVISION POLYNÔMES, ANALYSE & ALGEBRE BILINEAIRE

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[-1,1]$.

Soit $f \in E$. On note $N_\infty(f) = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

On confond polynôme et fonction polynôme.

Les parties II et III sont indépendantes et le préliminaire est utilisé à la fin du II.

Préliminaire

a) En utilisant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire binomiale, montrer que :

$$\forall x \in \left]0,1\right[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)x^k(1-x)^{n-k} = 0 \qquad (1)$$

$$\forall x \in \left]0,1\right[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}. \qquad (2)$$

Vérifier que ces formules sont encore valables pour $x = 0$ et $x = 1$.

b) Soit g une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ et $M_2 = \sup_{x\in[0,1]} |g''(x)|$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $B_n(g)$ par :

$$B_n(g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}.$$

Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [[0,n]]$,

$$\left| g\left(\frac{k}{n}\right) - g(x) - \left(\frac{k}{n}-x\right)g'(x)\right| \leq \frac{M_2(g)}{2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2. \qquad (3)$$

En déduire que : $\sup_{x\in[0,1]} |B_n(g) - g(x)| \leq \frac{1}{8n} M_2(g)$.

c) Soit f une fonction de classe C^2 sur $[-1,1]$. En utilisant la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(2x-1)$, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q_n de $\mathbb{R}_n(X)$ et un réel c tels que : $\sup_{x\in[-1,1]} |Q_n(x) - f(x)| \leq \frac{c}{n}$. $\qquad (4)$

Partie I : Définitions et propriétés des polynômes de Tchebychev

On appelle *polynômes de Tchebychev* les polynômes définis par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \text{ et } \forall n \geq 2,\ T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}. \qquad (5)$$

1. a) Calculer T_2 et T_3.
   b) Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant ?
   c) Etudier la parité de T_n.

2. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall \theta \in [0,\pi],\ T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. (6)
   b) En déduire que, pour $n \in \mathbf{N}^*$, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1,1[$, que l'on explicitera.
   c) Etablir que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ T_n = 2^{n-1}\prod_{j=0}^{n-1}\left(X - \cos\frac{(2j+1)\pi}{2n}\right)$.
   d) En remarquant que $\cos n\theta = \mathrm{Re}(e^{in\theta})$, exprimer T_n sous forme de somme.

3. a) Calculer $N_\infty(T_n)$.
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall u \in \mathbf{R},\ |\sin nu| \leq n|\sin u|$.
   c) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N},\ N_\infty(T_n') = n^2$.

4. a) En dérivant deux fois l'égalité (6), montrer que :
$$\forall x \in [-1,1],\ \forall n \in \mathbf{N},\ (x^2-1)T_n''(x) + xT_n'(x) - n^2T_n(x) = 0 \qquad (7)$$
   Justifier que (7) est vérifiée pour $x \in \mathbf{R}$.
   b) En dérivant (7), à l'aide de la formule de Leibniz, montrer que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall k \in [[0,n]],\ T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k}\,\frac{(n+k)!\ 2^k k!}{(n-k)!\ (2k)!} \text{ et } T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k}T_n^{(k)}(1).$$

5. Soit U_n l'ensemble des polynômes de terme dominant X^n.
   a) On suppose qu'il existe un polynôme $P \in U_n$ tel que $N_\infty(P) < \frac{1}{2^{n-1}}$.

   Préciser pour $k \in [[0,n]]$, le signe de $\frac{1}{2^{n-1}}T_n\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) - P\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)$.

   En déduire que $\frac{1}{2^{n-1}}T_n - P$ admet au moins n racines réelles, puis établir une contradiction, en examinant le degré de $\frac{1}{2^{n-1}}T_n - P$.
   b) En déduire le minimum de $N_\infty(P)$, lorsque P décrit U_n.

Partie II : Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

1. a) Montrer que, pour toute fonction h de E, l'intégrale $\int_{-1}^{1}\frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.

On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $t=\cos\theta$.

b) Pour $(f,g)\in E^2$, on pose $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Montrer que $\langle,\rangle$ définit un produit scalaire sur E. On note $\| \ \|$ la norme associée.

c) Calculer $\langle T_m,T_n\rangle$ suivant les valeurs des entiers m et n.

En déduire que $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

On posera pour $k\in[[0,n]]$, $e_k=\frac{T_k}{\|T_k\|}$.

2. Soit $f\in$ E et $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $E_n=\mathbb{R}_n[X]$ et $d_2(f,E_n)=\inf_{Q\in E_n}\|f-Q\|$.

E n'étant pas de dimension finie, on démontre certains résultats, connus en dimension finie. Soit p_n l'application définie par : $\forall f\in E,\ p_n(f)=\sum_{k=0}^{n}\langle f,e_k\rangle e_k$.

a) Montrer que p_n est un endomorphisme de E et un projecteur.

b) Montrer que : $\forall f\in E, \forall k\in[[0,n]],\ \langle f-p_n(f),e_k\rangle=0$.

Que peut-on en conclure ?

c) Montrer que : $\forall P\in E_n,\ \forall f\in E,\ \|f-P\|^2=\|p_n(f)-P\|^2+\|f-p_n(f)\|^2$.

d) En déduire que $p_n(f)$ est l'unique vecteur tel que $\|f-p_n(f)\|=d_2(f,E_n)$.

e) Exprimer $p_n(f)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev et montrer que :

$$d_2(f,E_n)=\sqrt{\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle f,T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2}}.$$

On dit que $p_n(f)$ est le *polynôme de meilleure approximation quadratique sur* E_n.

3. a) Montrer que la série $\sum\frac{\langle f,T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2}$ est convergente.

b) Que peut-on dire de $\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$?

4. a) Soit $h\in$ E Montrer que : $\|h\|\le\sqrt{\pi}.N_\infty(h)$.

b) Soit f une fonction de classe C² sur $[-1,1]$. En utilisant (4), montrer que :

$$\exists c\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \|f-p_n(f)\|\le\sqrt{\pi}\frac{c}{n}.$$

En déduire que : $\lim_{n\to+\infty}\|f-p_n(f)\|=0$ et $\|f\|=\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\langle f,T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2}}$.

c) Application : Que peut-on dire d'une fonction h de classe C² sur $[-1,1]$, telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_{-1}^{1}\frac{h(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=0\ ?$$

Partie III : Majoration de polynômes à l'aide des polynômes de Tchebychev

1. Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts de $]-1, 1[$.

On définit les *polynômes de Lagrange* par : $\forall k \in [[0, n]],\ L_k = \prod_{0\leq j\leq n, j\neq k} \frac{X-a_j}{a_k-a_j}$.

a) Quel est le degré de L_k ? Calculer $L_k(a_j)$.

b) Montrer que $L_0, L_1, \ldots, L_n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) En déduire que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k$. (8)

2. Dans toute la suite, on choisit les a_k ainsi : $\forall k \in [[0,n]],\ a_k = \cos\left[\left(1-\frac{k}{n}\right)\pi\right]$

a) Pour $k \in [[0,n]]$, calculer $T_n(a_k)$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} L_k$.

b) Montrer que : $\forall x \in [1,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$.

c) En déduire que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall x \in [1,+\infty[,\ |P(x)| \leq N_\infty(P).T_n(x)$

3. a) Montrer que : $\forall x \in [1,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [[0,n]],\ T_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} |L_i^{(k)}(x)|$.

b) En déduire que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall x \in [1,+\infty[,\ \forall k \in [[0,n]],\ |P^{(k)}(x)| \leq N_\infty(P).T_n^{(k)}(x)$ (9)

4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $k \in [[1,n]]$ et $\lambda \in [-1,1]$.

a) On pose $P_\lambda(X) = P\left(\frac{\lambda+\varepsilon}{2}X + \frac{\lambda-\varepsilon}{2}\right)$ où $\varepsilon = 1$ si $\lambda \in [0,1]$ et $\varepsilon = -1$ si $\lambda \in [-1,0[$.

Montrer que : $|P_\lambda^{(k)}(1)| = \left(\frac{|\lambda|+1}{2}\right)^k |P^{(k)}(\lambda)|$.

b) En déduire, en utilisant (9) que $N_\infty(P^{(k)}) \leq 2^k N_\infty(P).T_n^{(k)}(1)$,

puis que : $N_\infty(P^{(k)}) \leq 2^{2k} \frac{k!}{(2k)!} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} N_\infty(P)$.

c) Dans le cas où $k = 1$, montrer la majoration plus fine : $N_\infty(P') \leq 2n^2 N_\infty(P)$.

Problème de synthèse
Autour de la médiane d'une variable alátoire réelle

On établit dans la partie I des résultats d'analyse utilisés dans la suite du problème ; dans la partie II, on définit l'intervalle médian d'une variable aléatoire et on étudie certaines propriétés (dans certains cas particuliers puis dans le cas général), et, dans la partie III, on détermine l'intervalle médian d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.

Partie I

Soit Ψ la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in]0,1[, \quad \Psi(x) = \dfrac{-x-\ln(1-x)}{x^2} \\ \Psi(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. a) Etablir que Ψ réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

   b) En déduire que :
   $$\forall\, x \in [0,1], \quad 0 \leq (1-x)\, e^x \leq e^{\frac{x^2}{2}}$$

   c) Soit $\sigma \in]0,1[$.

   Prouver qu'il existe un réel $\delta \in]0,1[$ tel que :
   $$\Psi(\delta) = \frac{1}{2\sigma^2}$$
   puis que :
   $$\forall\, x \in [0,\delta], \quad (1-x)\, e^x \geq e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-n\frac{t^2}{2}}\, dt$ existe et déterminer sa valeur.

b) On définit la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^1 ((1-t)e^t)^n \, dt.$$

Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Montrer également que :

$$\forall\, \sigma \in]0,1[, \quad \exists \delta \in]0,1[\;/\; \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \leq I_n.$$

3. Soit $\varepsilon \in]0,1[$.

a) Déduire de la question précédente et à l'aide d'un choix judicieux de σ, que :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* \;/\; \forall\, n \geq n_0, \quad 1-\varepsilon \leq \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n \leq 1+\varepsilon.$$

b) Déterminer alors un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$

Partie II

Soient (Ω, τ, P) un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle définie sur (Ω, τ, P) et F la fonction de répartition de X. On appelle ensemble des médianes (ou intervalle médian) de X l'ensemble $M(X)$ défini par :

$$M(X) = \{m \in \mathbb{R} \;/\; P([X < m]) \leq \frac{1}{2} \leq P([X \leq m])\}.$$

A. **Quelques propriétés de $M(X)$**

1. Peut-on avoir $M(X) = \mathbb{R}$?

2. Soient a et b deux éléments distincts de $M(X)$ avec $a < b$, et c un réel de $]a,b[$.

   Prouver que c appartient à $M(X)$.

   Que peut-on en déduire ?

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$M(X+a) = \{m+a,\ m \in M(X)\},$$

et que

$$M(aX) = \{am,\ m \in M(X)\}.$$

B. <u>Cas discret</u>

On étudie dans cette partie le cas où X est une variable aléatoire réelle discrète.

1. a) On suppose que la fonction de répartition F prend la valeur $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'il existe α, un réel tel que $F(\alpha) = \frac{1}{2}$.

   Montrer que $M(X)$ est un segment.

   b. On suppose maintenant que F ne prend pas la valeur $\frac{1}{2}$.

   Montrer que $M(X)$ est alors réduit à un point.

2. On suppose dans cette question que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

   Déterminer $M(X)$ (on distinguera les cas selon la valeur de p).

3. On suppose dans cette question que X suit la loi binomiale de paramètres n ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\frac{1}{2}$.

   a) Montrer que :
   $$\forall\, k \in [\![0,n]\!],\quad P([X \leq k]) = P([X \geq n-k]).$$

   b. En déduire $M(X)$ (on distinguera les cas suivants la parité de n).

4. Soit Y une variables aléatoires discrètes.

   A-t-on :
   $$M(X+Y) = \{m+n,\ (m,n) \in M(X) \times M(Y)\}\ ?$$

5. On suppose dans cette question que X admet une espérance et une variance.

   Montrer que :
   $$\forall\, m \in M(X), |m - E(X)| \leq \sqrt{2}\sigma(X)$$
   (on distinguera les cas selon la position de m par rapport à $E(X)$).

C. **Cas continu**

On étudie dans cette partie le cas où X est une variable aléatoire à densité, dont une densité est une fonction f.

1. a) Peut-on avoir $M(X) = \emptyset$?

   b) Déterminer $M(X)$ si X suit la loi normale centrée réduite.

   c) On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$.

   Déterminer $M(X)$ et montrer que :
$$E(X) \notin M(X).$$

2. Soit $(a, b) \in (\bar{\mathbb{R}})^2$, $a \leq b$.

   On suppose, dans cette question, que f est continue et strictement positive sur $]a, b[$ et nulle en dehors de $[a, b]$ (si $]a, b[\neq \mathbb{R}$).

   On note F sa fonction de répartition.

   a) Montrer que la restriction F_1 de F à $]a, b[$ réalise une bijection de $]a, b[$ sur $]0, 1[$.

   b) En déduire que :
$$\exists!\ m_0 \in]a, b[, \quad F(m_0) = \frac{1}{2},$$
   puis que :
$$M(X) = \{m_0\}$$

   c) Que peut-on dire si f n'est pas strictement positive sur $]a, b[$?

3) On suppose, dans cette question, que f est continue et positive sur $]a, b[$ et nulle en dehors de $[a, b]$ (si $]a, b[\neq \mathbb{R}$), et que X admet une espérance et une variance.

   Montrer que :
$$\forall\ m \in M(X),\ |m - E(X)| \leq \sqrt{2}\sigma(X).$$

Partie III

Toutes les variables aléatoires de cette partie sont supposées définies sur un même espace probabilisé (Ω, τ, P).

On définit la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ P_n(X) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

1. a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \int_0^x e^{-u} u^n \, du = n!\ (1 - P_n(X))$$

b) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad 1 - P_n(n) = \frac{e^{-n}\ n^{n+1}}{n!}\ I_n,$$

où $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie en partie I.

c) Ecrire un programme en turbo-pascal permettant de calculer et d'afficher la valeur de $P_n(n)$ pour un entier naturel n non nul entré par l'utilisateur.

2. Etablir à l'aide des résultats de la partie I que :

$$1 - P_n(n) \sim \frac{n^n}{n!}\ e^{-n} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$$

3. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une même loi de Poisson de paramètre 1.

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires S_n et Y_n par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \\ Y_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

b) En déduire à l'aide de la suite de variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}$$

puis que (Formule de Stirling) :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

4. a) Montrer que :

$$\forall\, n \in [2, +\infty[, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n-1}(x) = P_n(x) + P_n'(x).$$

b) Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que la suite $(P_n(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et que la suite $(P_{n-1}(n))_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

c) Prouver alors que les suites $(P_n(n)_{n\,\geq\,2})$ et $(P_{n-1}(n)_{n\geq 2})$ sont adjacentes.

d) En déduire que, si X suit une loi de Poisson de paramètre $n (n \in \mathbb{N}^*)$, on a :

$$M(X) = \{n\}.$$

Correction

Partie I

1. a) Ψ est continue sur $]0, 1[$ comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $]0, 1[$.

De plus, au voisinage de 0, on a :

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

où

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

d'où

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} + \varepsilon(x)$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \Psi(x) = \frac{1}{2}$$

$$= \Psi(0).$$

Psi est donc continue en 0, et on peut conclure :

$$\boxed{\Psi \text{ est continue sur } [0,1[.}$$

b) Ψ est dérivable sur $]0,1[$ et on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ \Psi'(x) = \frac{x^2(-1+\frac{1}{1-x}) - 2x(-x-\ln(1-x))}{x^4}$$

$$= \frac{x + \frac{x}{1-x} + 2\ln(1-x)}{x^3}.$$

Soit alors φ la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\quad \varphi(x) = x + \frac{x}{1-x} + 2\ln(1-x)$$

φ est dérivable sur $[0,1[$ et :

$$\forall x \in\ [0,1[,\quad \varphi'(x) = 1 + \frac{1-x+x}{(1-x)^2} - \frac{2}{(1-x)}$$

$$= \frac{(1-x)^2 + 1 - 2(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$$

Ainsi :

$$\forall x \in]0,1[,\quad \varphi'(x) > 0.$$

Comme $\varphi(0) = 0$ et comme φ est strictement croissant sur $]0,1[$:

$$\forall x \in]0,1[,\quad \varphi(x) > 0$$

donc :

$$\forall x \in]0,1[,\quad \Psi'(x) > 0.$$

Ψ étant continue en 0, elle est strictement croissante sur $[0,1[$.

Etant continue sur $[0,1[$, Ψ établit une bijection de $[0,1[$ sur $[\Psi(0), \lim_{x\to+\infty} \Psi(x)[$

Comme $\Psi(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} \Psi(x) = +\infty$, on peut conclure :

$$\boxed{\Psi \text{ réalise une bijection strictement croissante de } [0,1[\text{ sur } \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[.}$$

2. a) • Comme exponentielle est positive sur $[0,1]$:

$$\forall\, x \in [0,1], \quad 0 \ \leq (1-x)\, e^x.$$

• D'après la question 1.b) :

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad \Psi(x) \ \geq \ \Psi(0)$$

et comme $-x^2 \ \leq \ 0$:

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad -x^2\Psi(x) \ \leq \ -x^2\Psi(0)$$

et exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad \exp(-x^2\ \Psi(x)) \ \leq \ \exp(-x^2\ \Psi(0))$$

soit :

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad (1-x)e^x \ \leq \ e^{-\frac{x^2}{2}}$$

De plus, comme $0 \ \leq \ e^{-\frac{1}{2}}$ (l'inégalité reste valable pour $x = 1$).

b) • Comme $\sigma \in]0,1[$, $\sigma^2 \in]0,1[$ donc $\dfrac{1}{2\sigma^2} \in \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

D'après la question 1.b), $\dfrac{1}{2\sigma^2}$ admet un antécédent par Ψ dans $]0,1[$ donc :

$$\boxed{\exists\, \delta \in]0,1[\ / \ \Psi(\delta) = \frac{1}{2\sigma^2}}$$

• Comme Ψ est croissante sur $[0,1[$ et $\delta \in]0,1[$, Ψ est croissante sur $[0,\delta]$ donc :

$$\forall\, x \in [0,\delta], \quad \Psi(x) \ \leq \ \Psi(\delta)$$

et comme $-x^2 \ \leq \ 0$:

$$\forall\, x \in [0,\delta], \quad -x^2\Psi(x) \ \geq \ -x^2\Psi(\delta)$$

et comme exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in [0,\delta], \quad \exp(-x^2\Psi(x)) \ \geq \ \exp(-x^2\Psi(\delta))$$

donc :

$$\boxed{\forall\, x \in [0, \delta], \quad (1-x)e^{x} \;\geq\; e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}}$$

3. a) • soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètre 0 et α.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}}$$

est une densité de X donc :

$$\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}}\, dt = 1}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on a :

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$$

et comme la fonction $t \mapsto e^{-n\frac{t^2}{2}}$ est pair :

$$2\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-n\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$$

soit :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-n\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

b) • D'après la question 2a) , la fonction $y \mapsto y^n (n \in \mathbb{N}^*)$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, t \in [0,1], \quad ((1-t)\, e^t)^n \;\leq\; e^{-n\frac{t^2}{2}}.$$

Ces fonctions étant continues sur $[0,1]$, par croissance de l'intégration

On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \;\leq\; \int_0^1 e^{-n\frac{t^2}{2}}\, dt$$

et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-n\frac{t^2}{2}}\, dt \;\geq 0$ (par positivité de l'intégration car cette intégrale converge)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \;\leq\; \int_0^1 e^{-n\frac{t^2}{2}}\, dt + \int_1^{+\infty} e^{-n\frac{t^2}{2}}\, dt$$

et d'après la relation de Chasles et la question précédente :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \;\leq\; \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $y \mapsto y^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'aprés la question 2.b),

On a :

$$\forall\, \sigma \in]0,1[, \quad \exists \delta \in]0,1[\;/\; \forall\, t \in [0,\delta], \quad ((1-t)e^t)^n \;\geq\; e^{-\frac{t^2 n}{2\sigma^2}}$$

Ces fonctions étant continues sur $[0,\delta]$, par croissance de l'intégration

$$\forall\, \sigma \in]0,1[, \; \exists\, \delta \in]0,1[, \quad \forall \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\delta ((1-t)e^t)^n\, dt \;\geq\; \int_0^\delta e^{-n\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Comme :

$$\forall\, t \in [\delta, 1], \quad ((1-t)e^t)^n \;\geq\; 0,$$

Par positivité de l'intégration ($\delta \; < \; 1$)

$$\int_\delta^1 ((1-t)e^t)\, dt \;\geq\; 0$$

et d'après la relation de Chasles :

$$\forall\, \sigma \in]0,1[, \quad \exists\, \delta \;]0,1[, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \;\geq\; \int_0^\delta e^{-\frac{nt^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Comme $t \mapsto \sqrt{n}\,\dfrac{t}{\sigma}$ est de classe C^1 sur $[0,\delta]$, en effectuant le changement de variable

$$\left\{ \; u = \sqrt{n}\frac{t}{\sigma} \quad , \right.$$

On a :

$$\forall\, \sigma \in]0,1[, \quad \exists\, \delta \;]0,1[, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \;/\; \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}\frac{\delta}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

De plus, si $\sigma \in]0,1[$, comme $\sqrt{n}\delta \;\geq 0$, $\sqrt{n}\dfrac{\delta}{\sigma} \;\geq\; \sqrt{n}\delta.$

Comme $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est positive, $\displaystyle\int_{\sqrt{u}\delta}^{\sqrt{u}\frac{\delta}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \;\geq\; 0$

et d'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\forall\, \sigma \in]0,1[,\ \exists\, \delta \in]0,1[\ /\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}\,\delta} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\ \leq\ I_n}$$

4. a) D'aprés la question précédente, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, I_n\ \leq\ 1\ \leq 1+\varepsilon \qquad (1)$$

De plus, on a :

$$\forall\, \sigma \in]0,1[,\ \exists\, \delta \in]0,1[,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\ \leq\ \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, I_n \quad (2)$$

Comme $\delta\ >\ 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \delta\sqrt{n} = +\infty$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

et d'après la question 3.a) pour $n = 1$:

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sigma.$$

D'après la définition de la limite, on a donc :

$$\forall\, \beta\ >\ 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*,\quad \forall\, n\ \geq\ n_0,\quad \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\ \geq\ \sigma - \beta.$$

Ainsi pour $\sigma = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ $(\sigma \in]0,1[)$ et $\beta = \frac{\epsilon}{2} (\beta > 0)$ et d'après (1) et (2)

$$\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*,\quad \forall\, n\ \geq\ n_0,\quad 1-\varepsilon \leq \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n\ \leq\ 1+\varepsilon}$$

b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall\, \varepsilon \in]0,1[,\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall\, n\ \geq\ n_0,\quad \left|\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, I_n - 1\right|\ \leq\ \varepsilon$$

et donc :

$$\forall\, \varepsilon\ >\ 0,\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall\, n\ \geq\ n_0,\quad \left|\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, I_n - 1\right|\ \leq\ \varepsilon$$

et par définition de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n = 1$$

Soit

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Partie II

A. 1.

Point méthodologique 1.

On va évidemment raisonner par l'absurde ici. En remplaçant les probabilités en jeu par une fonction de répartition et en connaissant bien les propriétés des fonctions de répartition, on va y arriver sans trop souffrir !

Supposons que $M(X) = \mathbb{R}$.

On a alors en posant F la fonction de répartition de X :

$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad F(x) \;\geq\; \dfrac{1}{2}$ ce qui est impossible car $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{M(X) \neq \mathbb{R}}$$

▪ **Remarque** On pouvait aussi raisonner sur la limite de $P(X < m)$ en $+\infty$, qui vaut 1, et arriver à une contradiction.

2.

Point méthodologique 2.

Comme souvent lorsqu'il y a des inégalités portant sur des probabilités, on raisonnera souvent à l'aide d'inclusion d'événements. Reste à trouver ici les bons événements à comparer. En posant bien ce que l'on a et ce que l'on cherche, cela apparaît assez clairement…

- On a :

$[X < c] \subset [X < b]$ donc :

$P(X<c) \leq P(X<b)$ et comme $b \in M(X)$, $P(X<b) \leq \frac{1}{2}$ donc :

$$P(X<c) \leq \frac{1}{2}.$$

De plus, on a :

$[X \leq a] \subset [X \leq c]$ donc :

$P(X \leq a) \leq P(X \leq c)$ et comme $a \in M(X), P(X \leq a) \geq \frac{1}{2}$ donc

$$\frac{1}{2} \leq P(X \leq c).$$

Ainsi :

$$P(X<c) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq c)$$

donc :

$$\boxed{c \in M(X)}$$

- On en déduit :

$\forall\, c \in [a,b],\ \ c \in M(X)$ donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } M(X) \text{ contient deux réels } (a,b) \text{ tels que } a<b \\ \text{alors nécessairement, } M(X) \text{ contient l'intervalle } [a,b]\end{array}}$$

3.

Point méthodologique 3.

Il s'agit de montrer ici que :

$$m \in M(X) \Longleftrightarrow m+a \in M(X+a)$$

puis que :

$$m \in M(X) \Longleftrightarrow am \in M(aX)$$

On va procéder par équivalence directement. Attention, dans le second cas, il y aura des distinctions à faire en fonction du signe de a...

- On a :

$$m \in M(X) \Longleftrightarrow P(X<m) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq m)$$

soit :

$$\Longleftrightarrow P(X+a<m+a) \leq \frac{1}{2} \leq P(X+a \leq m+a)$$

d'où :

$$\Longleftrightarrow m+a \in M(X+a)$$

donc :

$$\boxed{M(X+a)=\{m+a,\quad m \in M(X)\}}$$

• ⋆ Si $a=0$, alors aX est la variable aléatoire certaine égale à 0

Ainsi :

$$\forall x<0,\quad P(aX \leq x)=0<\frac{1}{2}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_{-}^{*},\quad x \notin M(aX).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_{+},\quad P(aX \leq x)=1$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ P(aX<x)=1\ >\frac{1}{2}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*},\quad x \notin M(X)$$

et

$$P(aX<0) \leq \frac{1}{2} \leq P(aX \leq 0)$$

donc

$$\begin{aligned} M(aX) &= \{0\}=\{0.m,\ m \in M(X)\} \\ &= \{a.m,\ m \in M(X)\} \end{aligned}$$

⋆ Si $a>0$, alors :

$$m \in M(X) \Longleftrightarrow P(X<m) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq m)$$

et comme $a>0$:

$$\Longleftrightarrow P(aX<am) \leq \frac{1}{2} \leq P(aX \leq am)$$

$$\Longleftrightarrow am \in M(aX).$$

Donc
$$M(aX) = \{am,\ m \in M(X)\}.$$

⋆ Si $a < 0$, alors :
$$m \in M(X) \Longleftrightarrow P(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq m)$$
et comme $a < 0$:
$$\Longleftrightarrow P(aX > am) \leq \frac{1}{2} \leq P(aX \geq am)$$
d'où :
$$m \in M(X) \Longleftrightarrow 1 - P(aX \geq am) \leq \frac{1}{2} \leq 1 - P(aX > am)$$
soit
$$\Longleftrightarrow P(aX < am) \leq \frac{1}{2} \leq P(aX \leq am)$$
$$\Longleftrightarrow am \in M(aX).$$

Ainsi :
$$M(aX) = \{am,\ m \in M(X)\}$$

et dans tous les cas :
$$\boxed{\{M(aX) = am,\ \ m \in M(X)\}}$$

B. 1. a)

Point méthodologique 4.

Question assez délicate à formaliser. Pour comprendre ce qu'il se passe, comme souvent, on prend des exemples simples.

Par exemple, tentez de voir ce qu'il se passe pour une variable dont le support contient deux éléments a et b et tel que $F(a) = \frac{1}{2}$. On observe alors sans trop de difficultés que a et b sont dans $M(X)$. On utilise alors la question II.A.2 pour conclure que $M(X)$ contient le segment $[a, b]$. Il faudra alors montrer que tout élément qui n'est pas dans ce segment n'appartient pas à la médiane. Ca demande de la rigueur mais ce n'est pas trop difficile non plus.

Reste à formaliser le cas général. Et là, c'est un peu plus ardu ! Allons-y !

X est une variable alátoire discrète.

Posons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, l'ensemble des valeurs prises par X avec une probabilité non nulle où I est un ensemble fini ou dénombrable constitué d'entiers consécutifs. Comme F prend la valeur $\frac{1}{2}$, on a :

$$\exists\ i_0 \in I, P(X \leq x_{i_0}) = \frac{1}{2}.$$

on a alors :

- $\forall\ x < x_{i_0}$,

$$P(X \leq x) < P(X \leq x_{i_0})$$

soit

$$< \frac{1}{2}$$

$$\forall\ x \in]-\infty, x_{i_0}[, \quad x \notin M(X).$$

- $\forall\ x > x_{i_0+1}$,

$$P(X < x)\ \geq\ P(X \leq x_{i_0+1})$$

d'où :

$$> \frac{1}{2}$$

donc :

$$\forall\ x \in]x_{i_0+1}, +\infty[, \quad x \notin M(X).$$

- Enfin, on a :

$$P(X < x_{i_0}) < \frac{1}{2} \ \text{ et } \ P(X \leq x_{i_0}) = \frac{1}{2}$$

donc

$$P(X < x_{i_0}) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq x_{i_0})$$

Soit $x_{i_0} \in M(X)$.

$$P(X < x_{i_0+1}) = \frac{1}{2} \ \text{ et } \ P(X \leq x_{i_0+1})\ >\ \frac{1}{2}$$

donc

$$P(X < x_{i_0+1})\ \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq x_{i_0+1})$$

donc $x_{i_0+1} \in M(X)$.

D'aprés la question II.A.2. , $[x_{i_0}, x_{i_0+1}] \subset M(X)$ d'où

$$\boxed{M(X) \text{ est un segment}}$$

b) Comme F ne prend pas la valeur $\frac{1}{2}$, on a :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \,/ \forall x < \alpha, \quad P(X \leq x) < \frac{1}{2} \quad \text{et } \forall x \geq \alpha, \quad P(X \leq x) > \frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$\forall x < \alpha, \quad x \notin M(X).$$

De plus :

$$\forall x > \alpha, \quad P(X < x) > \frac{1}{2}$$

donc :

$$\forall x > \alpha, \quad x \notin M(X).$$

Enfin :

$$P(X < \alpha), \frac{1}{2} < P(X \leq \alpha)$$

d'où :

$$\alpha \in M(X)$$

donc :

$$\boxed{M(X) \text{ est réduit à un point}}$$

2. Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, en notant F sa fonction de répartition,

on a :

$$\begin{cases} \forall x < 0, \quad F(x) = 0 \\ \forall x \in [0, 1[, \quad F(x) = 1 - p \\ \forall x \in [1, +\infty[, \quad F(x) = 1 \end{cases}$$

- Si $p = \frac{1}{2}$, F prend la valeur $\frac{1}{2}$, et d'après le résultat de la question II.B.1.a)

(on a $n_{i_0} = 0$) :

$$\boxed{\text{Si } p = \frac{1}{2}, \quad M(X) = [0, 1]}$$

- Si $p < \frac{1}{2}$, F ne prend pas la valeur $\frac{1}{2}$ et

$P(X < x) = 0$, $F(0) > \frac{1}{2}$ donc d'après la question II.B.1.b) $(\alpha = 1)$

$$\boxed{\text{Si } p < \frac{1}{2}, \quad M(X) = \{0\}}$$

- Si $p > \frac{1}{2}$, F ne prend pas la valeur $\frac{1}{2}$ et $P(X < 1) < \frac{1}{2}$, $\quad P(X \leq 1) = 1$

donc d'après la question II.B.1.b) $(\alpha = 1)$:

$$\boxed{\text{Si } p > \frac{1}{2}, \quad M(X) = \{1\}}$$

3. a) On a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X \leq k) = \sum_{j=0}^{k} P(X = j)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Soit en posant $j' = n - j$:

$$= \sum_{j=n-k}^{n} \binom{n}{n-j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et comme $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$:

$$= \sum_{j=n-k}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

soit :

$$= \sum_{j=n-k}^{n} P(X = j)$$

donc

$$\boxed{\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad P(X \leq k) = P(X \geq n - k)}$$

b) • Si n est pair, en posant $n = 2p$, d'après la question précédente, on a :

$$\forall\, k \in [\![0, 2p]\!], \quad P(X \leq k) = P(X \geq 2p - k)$$

soit :

$$= 1 - P(X < 2p - k)$$

et comme X est une variable aléatoire discrète :

$$= 1 - P(X \leq 2p - k - 1)$$

Pour $k = p$, On a alors :

$$P(X \leq p) + P(X \leq p - 1) = 1.$$

Comme $P(X \leq p - 1) \ < \ P(X \leq p)$, on en déduit

$$\begin{cases} P(X \leq p) > \frac{1}{2} \\ P(X \leq p - 1) < \frac{1}{2} \end{cases}$$

La fonction de répartition de X ne prend pas la valeur $\frac{1}{2}$, et d'après la question II.B.1.b) :

$$\boxed{M(X) = \{p\}}$$

- Si n est impair, en posant $n = 2p + 1$, on a de même :

$$\forall\, k \in [\![0, 2p+1]\!], \quad P(X \leq k) + P(X \leq 2p - k) = 1$$

donc pour $k = p$:

$$2P(X \leq p) = 1$$

soit

$$P(X \leq p) = \frac{1}{2}$$

La fonction de répartition de X prend alors la valeur $\frac{1}{2}$ en p et d'après II.B.1.a) :

$$\boxed{M(X) = [0, 1]}$$

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, donc $X + Y \hookrightarrow B\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

   Or d'après la question II.B.2,

   $$M(X) = M(Y) = [0, 1],$$

   et la question II.B.3.b),

   $$M(X + Y) = \{1\}.$$

   Ainsi :

$$\boxed{\text{Dans le cas général,}\quad M(X+Y) \neq \{m+n,\quad (m,n) \in M(X) \times M(Y)\}}$$

5. • Si $m \leq E(X)$, on a :

$$V(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - E(X))^2 \, P(X = k)$$

soit :

$$= \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \leq m}} (k - E(X))^2 \, P(X = k) + \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k > m}} (k - E(X))^2 \, P(X = k)$$

d'où :

$$\geq \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \leq m}} (k - E(X))^2 \, P(X = k).$$

or :

$$\forall\, k \in X(\Omega \quad k \leq m, \quad k - E(X) \leq m - E(X) \leq 0$$

donc :

$$\forall\, k \in X(\Omega), \quad k \leq m, \quad (k - E(X))^2 \geq (m - E(X))^2$$

d'où :

$$V(X) \geq (m - E(X))^2 \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \leq m}} P(X = k)$$

soit :

$$\geq (m - E(X))^2 P(X \leq m)$$

et comme $m \in M(X)$:

$$\geq \frac{1}{2}(m - E(X))^2$$

d'où

$$2V(X) \geq (m - E(X))^2$$

et comme $y \mapsto \sqrt{y}$ est croissante sur $\mathbb{R}$

$$\sqrt{2}\sigma(X) \;\geq\; |m - E(X)|.$$

- De même, si $m \geq E(X)$, on a :

$$V(X) \geq \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq m}} (k - E(X))^2 \ P(X = k)$$

d'où :

$$\geq (m - E(X))^2 P(X \geq m)$$

donc :

$$\geq (m - E(X))^2 (1 - P(X < m))$$

comme $m \in M(X)$, on a :

$$P(X < m) \ \leq \ \frac{1}{2}$$

donc :

$$1 - P(X < m) \ \geq \ \frac{1}{2}$$

d'où :

$$V(X) \geq \frac{1}{2}(m - E(X))^2.$$

Ainsi dans tous les cas :

$$\boxed{\forall m \in M(X), \quad |m - E(X)| \ \leq \ \sqrt{2}\sigma(X)}$$

C. 1. a) Soit X une variable aléatoire à densité et F sa fonction de répartition.

Comme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X < x) = P(X \leq x),$$

on a :

$$M(X) = \{m \in \mathbb{R}, \quad F(m) = \frac{1}{2}\}.$$

On a : $F(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, F continue sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists \, m \in \mathbb{R} \ / \ F(m) = \frac{1}{2}$$

donc :

$$\boxed{M(X) \neq \emptyset}$$

b) Soit F la fonction de répartition de X.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0.$$

d'où :

F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc F réalise une bijection de $\mathbb{R}$

sur $]0, 1[$

d'où :

$$\exists!\ \alpha \in \mathbb{R} \ / \ F(\alpha) = \frac{1}{2}$$

et comme

$$F(0) = \frac{1}{2}$$

et

$$M(X) = \{m \in \mathbb{R} \ / \ F(m) = \frac{1}{2}\}$$

$$\boxed{M(X) = \{0\}}$$

c) La fonction de répartition F de X est :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_-^*, & F(x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+, & F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}$$

Ainsi :

$$m \in M(X) \iff F(m) = \frac{1}{2}$$

$$\iff 1 - e^{-m\lambda} = \frac{1}{2}$$

et $m \in \mathbb{R}^+$ donc :

$$\iff m = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

d'où :

$$\boxed{M(X) = \left\{\frac{\ln 2}{\lambda}\right\}}$$

2. a) Comme f est continue sur $]a, b[$, F_1 est de classe C^1 sur $]a, b[$ et :

$$\forall\, x \in]a, b[, \quad F_1'(x) = f(x) > 0.$$

F_1 est donc strictement croissante sur $]a, b[$.

Comme elle y est continue, elle réalise une bijection de $]a, b[$ sur $\left] \lim\limits_{x \to a^+} F(x), \lim\limits_{x \to b_-} F(x) \right[$.

- Si $a \neq -\infty$ et $b \neq +\infty$,

  comme f est nulle en dehors de $[a, b]$:

$$\forall\, x < a, \quad F(x) = 0$$

  d'où :

$$\lim_{x \to a^-} F(x) = 0$$

et comme F est continue sur $\mathbb{R}$:

$$F(a) = 0$$

d'où

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = 0.$$

$$\forall\, x > b, \quad F(x) = 1$$

d'où

$$\lim_{x \to b^+} F(x) = 1$$

et comme F est continue sur $\mathbb{R}$:

$$F(b) = 1$$

d'où :

$$\lim_{x \to b^-} F_1(x) = 1$$

- Si $a = -\infty$,

$$\lim_{x \to a} F_1(x) = \lim_{x \to a} F(x)$$

et comme F est la fonction de répartition de X :

$$= 0$$

- De même, si $b = +\infty$,

$$\lim_{x \to b} F_1(x) = \lim_{x \to b} F(x) = 1$$

Ainsi :

$$\boxed{F_1 \text{ établit une bijection de }]a, b[\text{ sur }]0, 1[}$$

b) • Comme $\frac{1}{2} \in]0, 1[$ et d'après la question précédente :

$$\boxed{\exists!\ m_0 \in]a, b[\ /\ F(m_0) = \frac{1}{2}}$$

- $\forall x \leq a, \quad F(x) = 0$

et :

$$\forall\ x \geq b, \quad F(x) = 1$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus]a, b[, \quad x \notin M(X)$$

d'où

$$M(X) \subset]a, b[$$

et d'après le résultat précédent :

$$\boxed{M(X) = \{m_0\}}$$

c) F_1 est continue et croissante (car F est croissante) et $F_1(]a, b[) =]a, b[$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists\ m_0 \in]a, b[, \quad F(m_0) = \frac{1}{2}$$

donc

$$M(X) \subset]a, b[.$$

$$\boxed{M(X) \subset]a,b[\text{ mais } M(X) \text{ n'est pas nécessairement réduit à un point}}$$

3. Soit $m \in M(X)$

- Si $m \leq E(X)$, on a :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 \, f(t) \, dt$$

et comme

$$(t - E(X))^2 \, f(t) \geq 0$$

$$V(X) \geq \int_{-\infty}^{m} (t - E(X))^2 \, f(t) \, dt$$

or

$$t - E(X) \leq m - E(X) \leq 0$$

donc

$$(t - E(X))^2 \geq (m - E(X))^2$$

$$V(X) \geq (m - E(X))^2 \int_{-\infty}^{m} f(t) \, dt$$

soit :

$$\geq (m - E(X))^2 F(m)$$

et comme $m \in M(X)$:

$$\geq \frac{1}{2}(m - E(X))^2.$$

- Si $m \geq E(X)$, on a de même :

$$V(X) \geq \int_{m}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) \, dt$$

soit :

$$\geq (m - E(X))^2 \int_{m}^{+\infty} f(t) \, dt$$

et donc :

$$\geq (m - E(X))^2 (1 - F(m))$$

et comme $F(m) = \frac{1}{2}$:

$$\geq \frac{1}{2}(m - E(X))^2.$$

Dans tous les cas, on a donc :

$$2V(X) \geq (m - E(X))^2$$

et comme $y \mapsto \sqrt{y}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\boxed{\forall\, m \in M(X), \quad \sigma(X)\sqrt{2} \;\geq\; |m - E(X)|}$$

Ainsi, dans tous les cas :

$$2V(X) \leq (m - E(X))^2$$

Donc :

$$\boxed{\forall m \in M(X), \sqrt{2}\sigma(X) \;\leq\; |m - E(X)|}$$

Partie III

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$g : t \mapsto e^{-t}$ étant C^{n+1} sur $[0, x]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,

on a, d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(0-x)^k}{k!} g^{(k)}(x) + \int_x^0 \frac{(0-u)^n}{n!} g^{(n+1)}(u)\ d(u)$$

or :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g^{(k)}(t) = (-1)^k e^{-t}$$

D'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} (-1)^k e^{-x} + \int_x^0 \frac{(-1)^n u^n}{n!} (-1)^{n+1}\ e^{-u}\ du$$

$$= e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^x u^n e^{-u}\ du$$

Et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^x e^{-u} u^n\ du = n!(1 - P_n(x))}$$

b) Ainsi, pour $x = u$:

$$\forall u \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - P_u(u) = \frac{1}{u!}\int_0^u e^{-u}u^n \, du$$

En posant $u = nt$ $(du = n\ dt)$, C^1 sur $[0,1]$, il vient :

$$\forall u \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - P_u(u) = \frac{1}{u!}\int_0^1 e^{-nt}(nt)^n \ ndt$$

$$= \frac{1}{u!}\ n^{n+1}\int_0^1 t^n e^{-nt}\ dt$$

En posant $t = 1 - v(dt = -dv)$, C^1 sur $[0,1]$:

$$\forall u \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - P_u(u) = \frac{n^{u+1}}{u!}\int_0^1 (1-v)^u e^{-n+nv}\ dv$$

$$= \frac{e^{-n}\ n^{n+1}}{u!}\int_0^1 [(1-v)e^v]^n\ dv$$

et donc :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - P_u(u) = \frac{e^{-n}\ n^{n+1}}{n!} I_n}$$

c)

```
BEGIN
U:=1 ; S:=0 ;
For K:=0 to N do
  BEGIN
  S:=S+U;
  U:=U*N/(K+1) ;
  END;
S:=S/Exp(N);
END.
```

2. D'après I.4.b) :

$$I_u \underset{u\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2u}}.$$

Donc, d'après 1.b) :

$$1 - P_u(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-u}\ u^{u+1}}{u!}\sqrt{\frac{\pi}{2u}}$$

d'où :

$$\boxed{1 - P_u(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{u!}\ e^{-u}\sqrt{\frac{\pi n}{2}}}$$

3. a) Montrons par récurrence que :

$$\forall u \in \mathbb{N}^*, \quad S_u \hookrightarrow P(u)$$

⋆ Pour $u = 1$ $\quad S_u = X_1 \quad$ donc :

$$S_1 \hookrightarrow P(1)$$

⋆ Soit $u \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que :

$$S_u \hookrightarrow P(u).$$

On a :

$$S_{u+1} = S_u + X_{u+1}$$

Comme $X_1, X_2, ...X_{u+1}$ sont indépendantes

$S_u = X_1 + X_2 + ... + X_u$ sont indépendante de X_{u+1},

et comme

$$S_u \hookrightarrow P(u) \text{ et } X_{u+1} \hookrightarrow P(1) :$$

$$S_{u+1} \hookrightarrow P(u+1).$$

⋆ Ainsi

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{N}^*, \quad S_u \hookrightarrow P(u)}$$

b) D'où ; comme :

$$\forall u \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_u) = \sigma(X_u) = 1$$

d'après le théorème de la limite centrée :

$$\lim_{u \to +\infty} P(\varphi_u \leq 0) = \phi(0)$$

où ϕ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

On a donc :

$$\lim_{u \to +\infty} P\left(\frac{S_u - u}{\sqrt{u}} \leq 0\right) = \frac{1}{2}$$

soit :

$$\lim_{u\to+\infty} P(S_u \leq u) = \frac{1}{2}$$

Or, comme $S_u \hookrightarrow P(u)$:

$$\begin{aligned}\forall u \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_u \leq u) &= \sum_{k=0}^{u} P(S_u = k)\\ &= \sum_{k=0}^{u} e^{-u}\,\frac{u^k}{k!}\\ &= P_u(u).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{u\to+\infty} P_u(u) = \frac{1}{2}}$$

D'où :

$$\lim_{u\to+\infty} 1 - P_u(u) = \frac{1}{2}$$

Et d'après 2 :

$$\frac{1}{2} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{u^u}{u!}\, e^{-u}\sqrt{\frac{\pi u}{2}}$$

D'où :

$$\boxed{u! \underset{u\to+\infty}{\sim} \left(\frac{u}{e}\right)^u \sqrt{2\pi u}}$$

4. a) On a :

$$\begin{aligned}\forall u \geq 2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_u'(x) &= -e^{-x} \sum_{k=0}^{u} \frac{x^k}{k!} + e^{-x} \sum_{k=1}^{u} k\,\frac{x^{k-1}}{k!}\\ &= -P_u(x) + e^{-x} \sum_{k=1}^{u} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\end{aligned}$$

D'où, en posant $k' = k-1$:

$$\boxed{\forall\, u \geq 2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_u(x) + P_u'(x) = P_{u-1}(x)}$$

b) On a, d'après la question précédente avec $u+1$:

$$\forall\, u \in \mathbb{N}^*,\quad P_{u+1}(u+1) - P_u(u) = P_{u+1}(u+1) - P_{u+1}(u) - P'_{u+1}(u)$$

Et donc (formule de Taylor avec u est intégral appliquée à P_{u+1} sur $[u, u+1]$,

où P_{u+1} est C^2) :

$$\forall\, u \in \mathbb{N}^*,\quad P_{u+1}(u+1) - P_u(u) = \int_u^{u+1} \frac{(u+1-t)^1}{1!}\, P''_{u+1}(t)\, dt$$

d'après 4.a) :

$$\forall\, u \in \mathbb{N}^*,\quad \forall\, t \in [u, u+1],\quad P'_{u+1}(t) = P_u(t) - P_{u+1}(t)$$

Et par dérivation :

$$\begin{aligned}\forall\, u \in \mathbb{N}^*,\quad \forall\, t \in [u, u+1],\ P''_{u+1}(t) &= P'_u(t) - P'_{u+1}(t)\\ &= P_{u-1}(t) - P_u(t) - (P_u(t) - P_{u+1}(t))\\ &= -e^{-t}\,\frac{t^u}{u!} + e^{-t}\,\frac{t^{u+1}}{(u+1)!}\\ &= \frac{e^{-t}\,t^u}{u!}\,\left[-1 + \frac{t}{u+1}\right]\\ &\leq 0\end{aligned}$$

Ainsi : (avec égalité pour $t = u+1$)

$$\forall\, u \in \mathbb{N}^*,\quad \int_u^{u+1} \frac{(u+1-t)^1}{1!}\, P''_{u+1}(t)\, dt < 0$$

Et donc :

$$\forall\, u \in \mathbb{N}^*,\quad P_{u+1}(u+1) - P_u(u) \ < \ 0$$

Ainsi :

$$\boxed{(P_u(u))_{u\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante}}$$

De même, d'après 4.a) :

$$\begin{aligned}\forall\, u \geq 2,\quad P_u(u+1) - P_{u-1}(u) &= P_u(u+1) - P_u(u) - P'_u(u)\\ &= \int_u^{u+1} \frac{(u+1-t)^1}{1}\, P''_u(t)\, dt\end{aligned}$$

De plus, d'après les calculs précédents :

$$\forall\, t \in [u, u+1], \quad P_u''(t) = \frac{e^{-t}\, t^{u-1}}{(u-1)!} \left[-1 + \frac{t}{u}\right]$$

$$\geq 0 \quad \text{(avec egalité pour } t = u\text{)}$$

D'où :

$$\forall\, u \geq 2, \quad P_u(u+1) - P_{u-1}(u) \; > \; 0$$

Ainsi :

$$\boxed{(P_{u-1}(u))_{u\geq 2} \ \text{ est strictement croissante}}$$

c) On a :

$$\forall\, u \geq 2, \quad P_u(u) - P_{u-1}(u) = e^{-u}\, \frac{u^u}{u!}$$

Et d'après 3.b) :

$$P_u(u) - P_{u-1}(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi\, u}}$$

D'où :

$$\lim_{u\to+\infty} (P_u(u) - P_{u-1}(u)) = 0$$

Ainsi, d'après 4.b) :

$$\boxed{(P_u(u))_{u\geq 2} \text{ et } (P_{u-1}(u))_{u\geq 2} \text{ sont adjacentes}}$$

d) D'après 3.b) :

$$\lim_{u\to+\infty} P_u(u) = \lim_{u\to+\infty} P_{u-1}(u) = \frac{1}{2}$$

Et donc, d'après 4.b) :

$$\forall\, u \geq 2, \quad P_{u-1}(u) < \frac{1}{2} < P_u(u).$$

Soit encore, en notant F la fonction de répartition de X, si $u \leq 2$:

$$F(u-1) \; < \; \frac{1}{2} \; < \; F(u).$$

Et donc, d'après II.2.b) :

$$M(X) = \{u\}$$

Si $u = 1$, on a :

$$\begin{aligned} F(0) &= P(X \leq 0) \\ &= e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} \\ &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$F(1) = \frac{2}{e} > \frac{1}{2},$$

donc :

$$M(X) = \{1\}$$

Ainsi :

$$\boxed{M(X) = \{u\}}$$

Problème de synthèse
Espérance totale et matrice de variance-covariance

Dans ce problème, on se propose de mettre en évidence des liens entre algèbre linéaire et bilinéaire, et les probabilités. On travaille sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et toutes les variables intervenant dans ce problème sont des variables aléatoires discrètes.

Pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, 1_A désigne la variable indicatrice de A.

Partie I. Opérateur espérance conditionnelle.

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant une espérance.

   a) Soit A un événement de probabilité non nulle.

   Montrer que Y admet une espérance conditionnelle sachant A et que

   $$E(Y|A) = \frac{E(Y.1_A)}{P(A)}$$

   b) Soit X une variable aléatoire discrète finie, telle que

   $$X(\Omega) = (x_k)_{1\leq k\leq q}$$

   et

   $$\forall\, k \in [\![1, q]\!] \quad P(X = x_k) \neq 0$$

   On note :

   $$E^X(Y) = \sum_{k=1}^{n} E(Y|X = x_k)1_{(X=x_k)}$$

   Montrer que $E^X(Y)$ est une variable aléatoire, et montrer qu'elle admet une espérance que l'on déterminera.

   Que peut-on dire de $E^X(Y)$ lorsque X et Y sont deux variables indépendantes ? lorsque $X = Y$?

   Dans toute la suite de cette partie, on considère un réel λ strictement positif et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes, à valeurs dans $\{-1,1\}$, de même loi de probabilité définie par :

$$P(X_0 = 1) = \frac{1}{1+\lambda}$$

2. Montrer que l'application

$$D = \det\begin{pmatrix} X_0 & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{pmatrix}$$

définie par :

$$\begin{cases} \Omega \to & \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \det\begin{pmatrix} X_0(\omega) & X_1(\omega) \\ X_2(\omega) & X_3(\omega) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est une variable aléatoire dont on déterminera l'espérance et la variance.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$.

   a) Calculer $E(u^{Z_n})$ pour tout u de $\mathbb{R}^*$

   b) Montrer que
   $$Z_n(\Omega) = \{2k - (n+1),\ k \in [\![0, n+1]\!]\}$$
   En utilisant le théorème de transfert, déterminer la loi de Z_n.

   c) Exprimer $E^{Z_n}(Z_{n+1})$ en fonction de Z_n et de λ.

   En déduire $E(Z_n)$.

4. a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$Y_n = \prod_{i=0}^{n} X_i.$$
   Calculer, en fonction de λ et de n l'espérance de Y_n.

   En déduire la loi de la variable aléatoire Y_n.

   (On pourra écrire $E(Y_n)$ en fonction de $P(Y_n = 1)$).

   b) T est une variable aléatoire de Poisson de paramètre μ, $\mu > 0$, telle que, pour chaque n de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires $T, X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient indépendantes.

On considère la variable aléatoire $V = \prod_{i=0}^{T} X_i$ définie par :

$$\begin{cases} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \prod_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega) \end{cases}$$

Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in \{-1, 1\}$,

$$P_{(T=n)}(V = x) = P(Y_n = x).$$

On note

$$E^T(V) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(V|T = k)1_{(T=k)}.$$

On admet que le résultat de 1.b) reste valable.

Montrer que

$$E^T(V) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{T+1}.$$

En déduire l'espérance de V

Partie II. Covariance et produit scalaire.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   a) Soit X une variable aléatoire presque surement constante.

   Montrer que
   $$V(X) = 0.$$

   b) Soit X une variable aléatoire admettant une variance nulle.

   On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$A_n = \left(|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}\right).$$

   En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad P(A_n) = 0.$$

   En déduire que
   $$P(|X - E(X)| > 0) = 0,$$

   puis que X est une variable aléatoire quasi-constante.

   Dans toute la suite du problème, on assimilera les variables aléatoires de variance nulle aux variables constantes.

On note $\mathcal{V}$ l'espérance vectoriel des variables aléatoires discrètes réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et E l'ensemble des variables aléatoires discrètes centrées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant une variance.

On rappelle qu'une variable aléatoire X admettant une espérance est centrée si et seulement si son espérance est nulle.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$.

3. a) Soient X et Y deux éléments de E et soient a et b deux réels.

   Montrer que (X, Y) et $(aX + b, Y)$ admettent une covariance et que
$$cov(aX + b, Y) = a\ cov(X, Y).$$

   b) Montrer que $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$ et que, pour A et B deux événements de $\mathcal{A}$,
$$1_{A\cap B} = 1_A \times 1_B \quad \text{et} \quad 1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}.$$

   c) Pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, on définit la variable
$$\mathcal{X}_A = 1_A - P(A).$$

   Vérifier que $\mathcal{X}_A$ est un élément de E

   et déterminer, pour $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, $cov(\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B)$.

4. a) Montrer (le faire, on l'a admis en cours) que la covariance définit un produit scalaire sur E.

   Quelle norme lui est associée ?

   b) Montrer que, pour toutes variables aléatoires X et Y de E :
$$|\rho_{X,Y}| \leq 1,$$
   où $\rho_{X,Y}$ désigne le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

5. On cherche ici le lien entre l'indépendance linéaire (au sens algébrique) et l'indépendance en probabilité.

   a) Soient X et Y deux variables aléatoires non nulles de E.

   Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes (au sens probabiliste),

   alors (X, Y) est une famille libre (c'est-à-dire X et Y sont linéairement indépendantes au sens algébrique).

b) Soit (A, B, C) un système complet d'événements.

Soit α et β réels tels que

$$\alpha \mathcal{X}_A + \beta \mathcal{X}_B = 0. \quad (\star)$$

En exploitant $(\star)$ pour $\omega \in \Omega$, selon que $\omega \in A$, $\omega \in B$ et $\omega \in C$,

montrer que $(\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B)$ est une famille libre de E.

Les variables aléatoires $\mathcal{X}_A$ et $\mathcal{X}_B$ sont-elles indépendantes (au sens probabiliste) ?

6. **Généralisation.**

a) Soit $n \geq 2$. On considère le système complet d'événements $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On note, pour $1 \leq i \leq n$,

$$P(B_i) = p_i \quad (\text{où } p_i \in]0, 1[) \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{B_i}.$$

Montrer que $(\mathcal{X}_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ est une famille libre de E.

En calculant $\sum_{i=1}^{n} 1_{B_i}$, montrer que $(\mathcal{X}_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ est liée.

b) On note $\quad F = Vect((\mathcal{X}_i)_{1 \leq i \leq n-1})$.

Quelle est la dimension de F ?

Montrer que pour tout $Y \in F$, il existe un unique élément $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, 1_{B_i}.$$

On montrera que, pour $1 \leq i \leq n$,

$$\alpha_i = E(Y | B_i).$$

c) On définit, pour $Y \in E$,

$$g(Y) = \sum_{i=1}^{n} E(Y|B_i) \, 1_{B_i}.$$

Montrer que, $g(Y)$ admet une espérance et la déterminer.

Montrer que $\forall \, i \in [\![1, n]\!]$, $\forall \, \omega \in B_i$,

$$g(Y)(\omega) = E(Y|B_i).$$

Partie III. Matrice de variance-covariance.

On considère les $n+1$ variables aléatoires $Y, X_1, X_2, \ldots, X_n$ toutes éléments de E,

c'est-à-dire admettant une variance et centrées.

On note $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, M_X la matrice de variance-covariance de X et

$$R = \begin{pmatrix} E(X_1Y) \\ E(X_2Y) \\ \vdots \\ E(X_nY) \end{pmatrix}$$

On suppose que les X_i, $1 \leq i \leq n$, sont linéairement indépendantes (c'est-à-dire forment une famille libre), et qu'au moins une des variables X_i n'est pas corrélée avec Y (c'est-à-dire $\exists\, i \in [\![1, n]\!] / cov(X_i, Y) \neq 0$).

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, et on note q_X la forme quadratique associée à M_X.

   a) Montrer que q_X est à valeurs positives, puis que les valeurs propres de M_X sont positives.

   b) Soit $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

   Montrer que, si $q_X(U) = 0$, alors $U = 0$.

   En déduire que M_X est inversible.

   On note alors U_0 l'unique solution de l'équation matricielle $M_X U_0 = R$.

   On note u_0 le vecteur de $\mathbb{R}_n$ canoniquement associé.

2. On note, pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$f(x) = V\left(Y - \sum_{i=1}^{n} x_i\, X_i\right).$$

   a) En notant $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, montrer que

$$f(x) = {}^tUM_XU - 2\,{}^tUR + E(Y^2)$$

b) Calculer, pour

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n), \quad f(u_0 + h) - f(u_0).$$

c) En déduire que f admet un minimum global atteint en u_0.

3. Compléments sur la matrice de variance-covariance.

r désigne un entier strictement positif.

Pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$ et pour tout entier j de $[\![1,r]\!]$, on considère des variables aléatoires réelles $Z_{i,j}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On définit la matrice aléatoire Z, à n lignes et r colonnes, en associant à tout ω de Ω, la matrice :

$$Z(\omega) = (Z_{i,j}(\omega))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$$

On suppose que les nr variables aléatoires $Z_{i,j}$ admettent une espérance $E(Z_{i,j})$, et on définit l'espérance de la matrice Z, notée $E(Z)$, comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les espérances $E(Z_{i,j})$, soit

$$E(Z) = (E(Z_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$$

Si Z et W sont deux matrices aléatoires à n lignes et r colonnes admettant chacune une espérance,

et si λ est réel, on remarquera que

$$E(\lambda Z + W) = \lambda E(Z) + E(W).$$

a) On considère une matrice A de $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$.

Montrer que

$$E(AZ) = AE(Z).$$

On admet que de même, si B est un élément de $\mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{R})$, avec $q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$E(ZB) = E(Z)B.$$

b) Montrer que

$$E({}^tZ) = {}^t(E(Z)).$$

c) Soient $T_1, T_2, \ldots, T_n$ n variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

On note $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$ et $V(T)$ la matrice de variance-covariance de T.

Montrer que

$$V(T) = E\left[(T - E(T)) \times {}^t(T - E(T))\right],$$

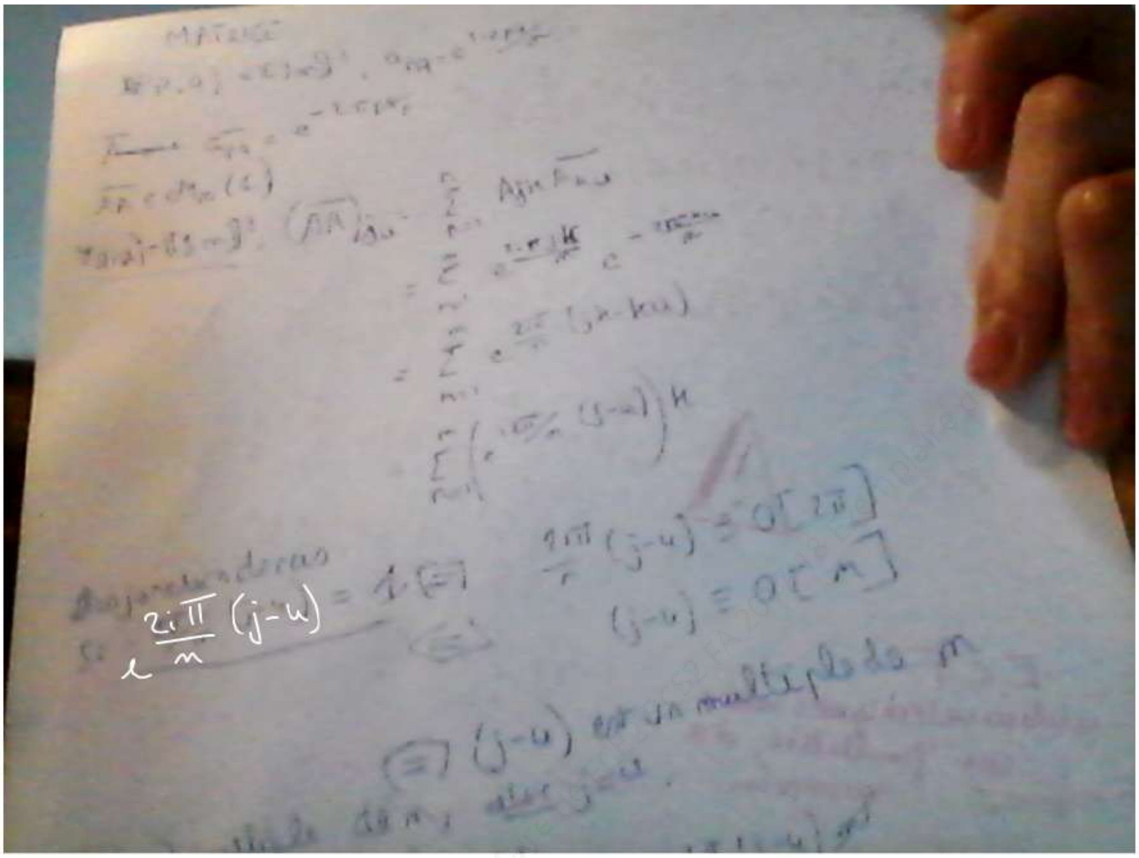
puis que

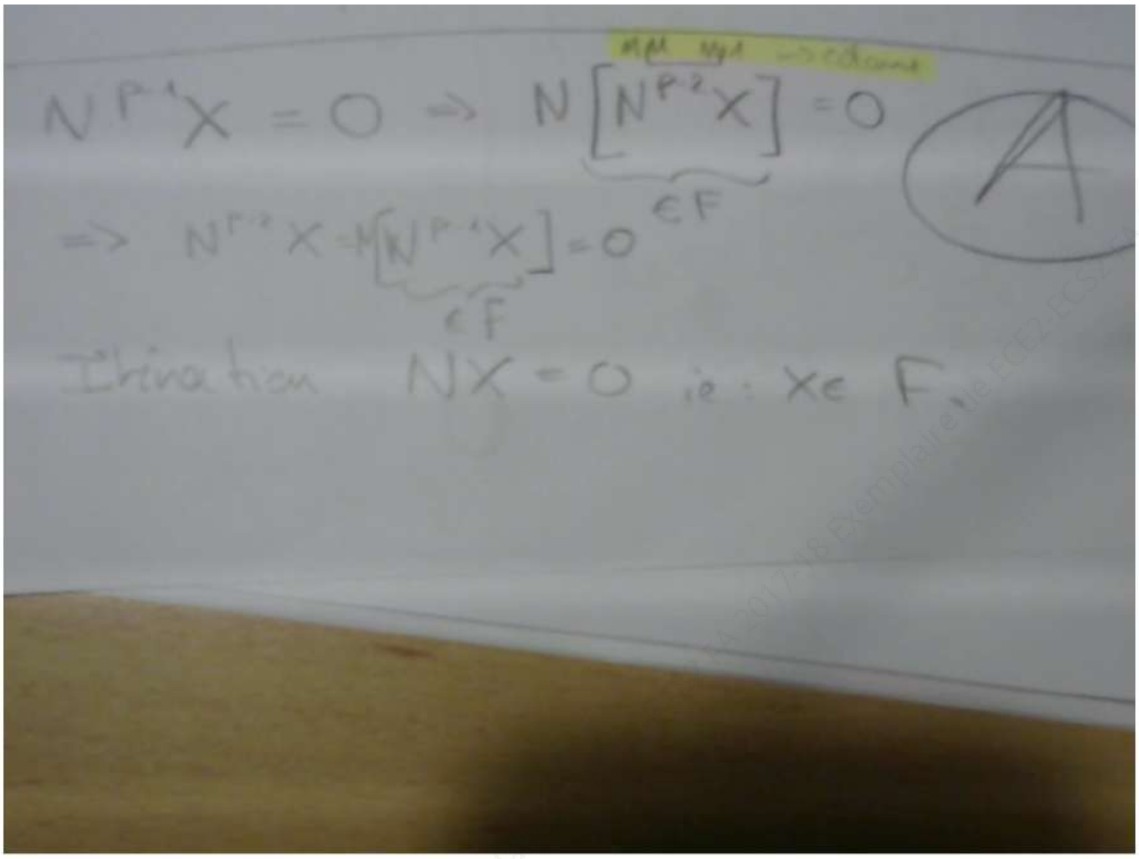
$$V(T) = E(T\,{}^tT) - E(T)E({}^tT).$$

d) Soit B une matrice de $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$.

Justifier l'égalité

$$V(BT) = BV(T)\,{}^tB.$$


$(j-u) \equiv 0 [n]$
$(j-u)$ est un multiple de m



$N^{p-1}X = 0 \Rightarrow N\underbrace{[N^{p-2}X]}_{\in F} = 0$

$\Rightarrow N^{p-2}X = N\underbrace{[N^{p-1}X]}_{\in F} = 0$

Itération $NX = 0$ ie : $X \in F$.

A

$N^{p-1}X = 0 \Rightarrow N(N^{p-2}X) = 0$

$\Rightarrow N^{p-2}X \in F$

$\Rightarrow N^{p-1}X = 0$ → marche pas ...

$(e_1, \ldots, e_n)$ base tq $u(e_i) = \alpha_i e_i$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u(e_i) = \alpha_i e_i$.

u diagonalisable et sa diagonale

$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

<u>Problème :</u>

$\forall k \in \mathbb{N}$, $[X \geq k] = [X = k] \cup [X > k]$.

L'union est disjointe.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $p(X \geq k) = p(X = k) + p(X > k)$.

i.e $p(X > k) = p(X \geq k) - p(X = k)$.

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p(X > k) = \sum_{k=0}^{n} k\, p(X \geq k) - \sum_{k=0}^{n} k\, p(X = k)$$

i.e $$\sum_{k=0}^{n} k\, p(X > k) = \sum_{k=0}^{n} (k+1-1)\, p(X \geq k) - \sum_{k=0}^{n} k\, p(X = k).$$

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :
$f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (x+y-2)^2 + z^2$ atteint un minimum sur $\mathbb{R}^3$.
Et déterminer la valeur de ce minimum.

M1 : Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du P.S canonique.

on a alors $f(x,y,z) = \| (x,y,x+y,z) - (1,0,2,0) \|^2$

Nommons $F = \{ (x,y,x+y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$

$= \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,0,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{v_3} \big)$

Rappel : . Soit $E = F \oplus F^{\perp}$ et p_F projecteur orthogonal sur F

Soit $a \in E$. L'ensemble $\{ \|a-u\|,\ u \in F \}$ atteint un min atteint en un unique v de F tq $v = p_F(a)$

. Caractérisation : F sev de E et p_F projecteur orthogonal sur F.

Alors $\forall x \in E$, $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$

F est un sev de $\mathbb{R}^3$ donc le minimum de f sur $\mathbb{R}^3$ existe et est atteint en un unique v de F défini par $v = p_F((1,0,2,0))$

Ainsi, comme $v \in F$, v est de la forme $(x,y,x+y,z)$, on utilise la caractérisation du projeté orthogonal i.e on cherche (x,y,z) tq :

$p_F((1,0,2,0)) = (x,y,x+y,z)$ et $(1,0,2,0) - p_F((1,0,2,0)) \in F^{\perp}$

on a : $(1,0,2,0) - p_F((1,0,2,0)) = (1-x, -y, 2-x-y, -z)$

Rappel : Si $(e_1,\dots,e_n)$ base de F et $x \in F^{\perp}$

alors $x \perp e_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$v - p_F(v) \in F^\perp$ donc on a :

$$\begin{cases} v - p_F(v) \perp v_1 \\ v - p_F(v) \perp v_2 \\ v - p_F(v) \perp v_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle (1-x, -y, 2-x-y, -z) ; (1,0,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (1-x, -y, 2-x-y, -z) ; (0,1,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (1-x, -y, 2-x-y, -z) ; (0,0,0,1) \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1-x+2-x-y = 0 \\ -y+2-x-y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y = 3 \\ x+2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+y = 3 \\ 3y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4/3 \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi f admet un minimum sur $\mathbb{R}^3$ en $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$
et ce minimum vaut $f\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

m2 en utilisant une base orthonormale de F

Rappel : • Si $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est une base orthonormale de F alors
$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i \rangle e_i$

• Orthonormalisation de Schmidt :
Soit p entier ≥ 2. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E
on note $u_1, u_2, \dots, u_p$ les vecteurs tq :

$$u_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 \quad \text{et } \forall k \in [\![2, p]\!], \; u_k = \frac{1}{\left\|e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k ; u_i \rangle u_i\right\|} \left[e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k ; u_i \rangle u_i\right]$$

La famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est alors une famille orthonormale
De plus : $\forall k \in [\![1, p]\!]$: $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$

. Formons une base orthonormale de F à partir de (v_1, v_2, v_3) et à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Nommons (u_1, u_2, u_3) la nouvelle base. On a :

- $\boxed{u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)}$

- $u_2 = \frac{1}{\|v_2 - \langle v_2 ; u_1 \rangle u_1\|} \left(v_2 - \langle v_2 ; u_1 \rangle u_1\right)$

$= \frac{1}{\|(0,1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1,0)\|} \left((0,1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1,0)\right)$

$= \frac{1}{\|(-1/2, 1, 1/2, 0)\|} \left(-\frac{1}{2}, 1, 1/2, 0\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{3/2}} \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$ Ainsi :

$\boxed{u_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right)}$

- $u_3 = \frac{1}{\|v_3 - \langle v_3 ; u_1 \rangle u_1 - \langle v_3 ; u_2 \rangle u_2\|} \left(v_3 - \langle v_3 ; u_1 \rangle u_1 - \langle v_3 ; u_2 \rangle u_2\right)$

on a : $\langle v_3 ; u_1 \rangle u_1 = \frac{1}{2} \langle (0,0,0,1) ; (1,0,1,0) \rangle (1,0,1,0)$

$= 0$

$\langle v_3 ; u_2 \rangle u_2 = \frac{2}{3} \langle (0,0,0,1) ; (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0) \rangle (1,0,1,0)$

$= 0$

Donc $\boxed{u_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3 = v_3 = (0,0,0,1)}$

- Comme (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormale de F, on a :

$\forall a \in E, \; p_F(a) = \sum_{i=1}^{3} \langle a ; u_i \rangle u_i$

et $p_F((1,0,2,0)) = (x, y, x+y, z)$ donc :

$$(x,y,x+y,z) = \frac{1}{2} \langle (1,0,2,0) ; (1,0,1,0) \rangle (1,0,1,0)$$
$$+ \frac{2}{3} \langle (1,0,2,0) ; (-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, 0) \rangle (-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, 0)$$
$$+ \langle (1,0,2,0) ; (0,0,0,1) \rangle (0,0,0,1)$$

$$\Leftrightarrow (x,y,x+y,z) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2} + \frac{1}{6}, 0\right)$$
$$= \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$ on retrouve le résultat obtenu en m 1 !

Rq : Vous l'aurez compris, cette méthode est vraiment le dernier recours mais c'est un bon entraînement donc ne la négligez pas...

m3 : en utilisant la méthode des moindres-carrés

Rappel Méthode des moindres carrés

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tq $Rg(A) = p$.

$B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\|.\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associé au PS canonique.

1. ${}^tAA$ est inversible
2. $\min_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|$ existe
3. il existe un unique X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tq $\|AX_0 - B\| = \min_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|$
4. $X_0 = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAB$ ou ${}^tAAX_0 = {}^tAB$

on dit que X_0 est une pseudo-solution de l'équation $AX = B$

(Brouillon : on a $f(x,y,z) = \|(x, y, x+y, z) - (1,0,2,0)\|^2$

on va trouver A, B, X tq $f(x,y,z) = \|AX - B\| \ldots$

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to B$ doit être un vecteur colonne
ici $B \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$

et $AX = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \\ z \end{pmatrix}$ donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et nécessairement $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$

on cherche donc A tq $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

on trouve aisément $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Rg(A) = 3$)

Rédaction : Notons $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on a $rg(A) = 3$ et $f(x,y,z) = \| AX - B \|^2$.

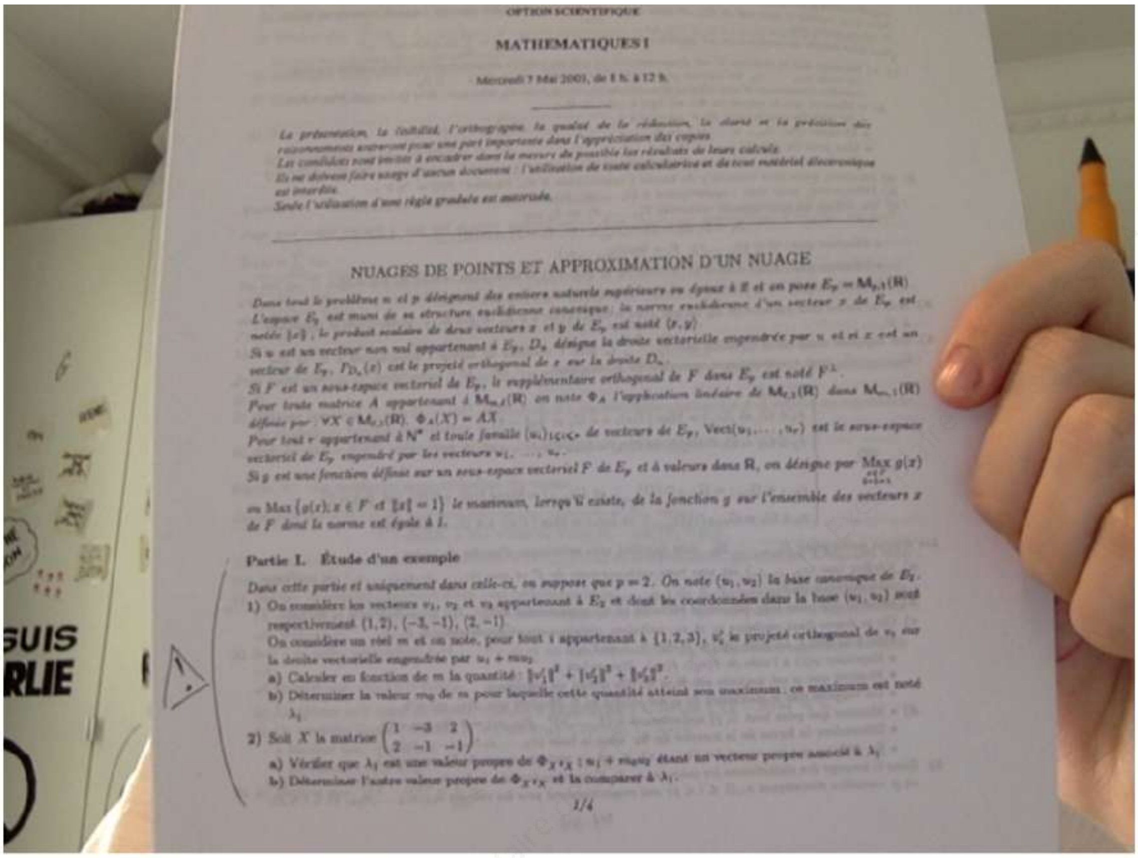
Par la méthode des moindres carrés, f admet un minimum et ce minimum est atteint en un unique X_0 vérifiant $X_0 = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAB$ ou ${}^tAA X_0 = {}^tAB$.

on a alors : $\begin{cases} {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } {}^tAA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ {}^tAB = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

il vient ${}^tAAX = {}^tAB \iff \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

On retrouve le même résultat qu'en m1 ...

Remarque : on pouvait aussi calculer $({}^tAA)^{-1}\,{}^tAB$ et trouver ainsi X_0.



OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 7 Mai 2001, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

NUAGES DE POINTS ET APPROXIMATION D'UN NUAGE

Dans tout le problème n et p désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et on pose $E_p = \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
L'espace E_p est muni de sa structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne d'un vecteur x de E_p est notée $\|x\|$, le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E_p est noté (x, y).
Si u est un vecteur non nul appartenant à E_p, D_u désigne la droite vectorielle engendrée par u et si x est un vecteur de E_p, $P_{D_u}(x)$ est le projeté orthogonal de x sur la droite D_u.
Si F est un sous-espace vectoriel de E_p, le supplémentaire orthogonal de F dans E_p est noté $F^\perp$.
Pour toute matrice A appartenant à $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on note Φ_A l'application linéaire de $\mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par : $\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\Phi_A(X) = AX$.
Pour tout r appartenant à $\mathbb{N}^*$ et toute famille $(u_i)_{1\leq i\leq r}$ de vecteurs de E_p, $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_r)$ est le sous-espace vectoriel de E_p engendré par les vecteurs $u_1, \ldots, u_r$.
Si g est une fonction définie sur un sous-espace vectoriel F de E_p et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $\underset{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}}{\mathrm{Max}}\, g(x)$ ou $\mathrm{Max}\{g(x) ; x \in F \text{ et } \|x\| = 1\}$ le maximum, lorsqu'il existe, de la fonction g sur l'ensemble des vecteurs x de F dont la norme est égale à 1.

Partie I. Étude d'un exemple

Dans cette partie et uniquement dans celle-ci, on suppose que $p = 2$. On note (u_1, u_2) la base canonique de E_2.

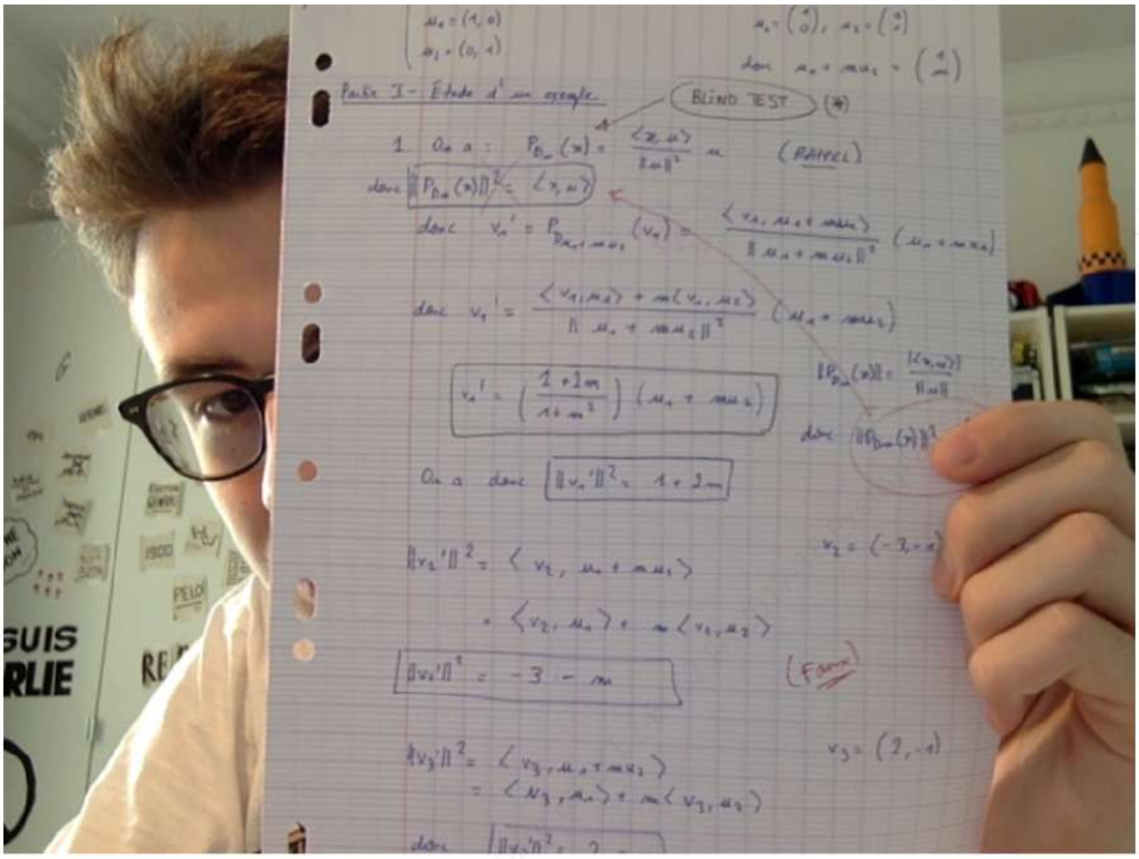
1) On considère les vecteurs v_1, v_2 et v_3 appartenant à E_2 et dont les coordonnées dans la base (u_1, u_2) sont respectivement $(1, 2)$, $(-3, -1)$, $(2, -1)$.
On considère un réel m et on note, pour tout i appartenant à $\{1, 2, 3\}$, v_i' le projeté orthogonal de v_i sur la droite vectorielle engendrée par $u_1 + mu_2$.
a) Calculer en fonction de m la quantité : $\|v_1'\|^2 + \|v_2'\|^2 + \|v_3'\|^2$.
b) Déterminer la valeur m_0 de m pour laquelle cette quantité atteint son maximum ; ce maximum est noté λ_1.

2) Soit X la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
a) Vérifier que λ_1 est une valeur propre de $\Phi_{X\,{}^tX}$; $u_1 + m_0u_2$ étant un vecteur propre associé à λ_1.
b) Déterminer l'autre valeur propre de $\Phi_{X\,{}^tX}$ et la comparer à λ_1.

1/4

$$v = p(u) \iff \begin{cases} v \in F \\ u - v \in F^\perp \end{cases}$$

$$p(u) = \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i \rangle e_i$$



$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \qquad (e_1, \dots, e_p) \text{ b.o.n de } F$$