$\boxed{\text{ESSEC E2 2020}}$

Partie I

1) a) (i) On a : $\boxed{\forall k \in [\![0,10]\!],\ p_k = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}}$

(ii) On a $E(X) = 10 \times \frac{1}{5}$

i.e. $\boxed{E(X) = 2}$

(iii). On a $V(X) = 10 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}$ i.e. $\boxed{V(X) = \frac{8}{5}}$

• D'après la formule de Koenig-Huygens :

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ i.e. $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \frac{8}{5} + 4$

$$\boxed{E(X^2) = \frac{28}{5}}$$

b) (i) On a : $N_k = k M_k$

Comme $p_k = \frac{M_k}{M}$, $N_k = k \times \frac{M_k}{M} \times M = k p_k M \quad (M \neq 0)$

Alors, $\boxed{N_k = k p_k M}$

(ii) $N = \sum_{k=0}^{10} N_k$ et d'après 1) b) (i)

$= \sum_{k=0}^{10} k p_k M = M \sum_{k=0}^{10} k p_k = M E(X) = 2M$ d'après 1) a) (ii)

Comme $M \neq 0$, $\boxed{\frac{N}{M} = 2}$

(iii) On a $p_k^* = \dfrac{N_k}{N}$

D'après 1) b) (i) et (ii), $p_k^* = \dfrac{k p_k M}{2M}$ i.e. $\boxed{p_k^* = k p_k / 2}$

c) (i) Soit $k \in [\![1, 10]\!]$

$P([Y=k])$ est la probabilité que la personne interrogée provienne d'une famille à k enfants. Donc $P([Y=k]) = p_k^*$.

D'après 1) a) (iii), on conclut :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,10]\!], P([Y=k]) = k p_k / 2}$$

(ii) Y est une variable aléatoire discrète finie, elle admet donc une espérance.

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{10} k P([Y=k]) = \sum_{k=1}^{10} k^2 \frac{p_k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k^2 p_k = \frac{1}{2} E(X^2)$$

Comme $E(X) = 2$, $\boxed{E(Y) = \dfrac{E(X^2)}{E(X)}}$

(iii) $E(Y) = \dfrac{E(X^2)}{E(X)} = \dfrac{\frac{28}{5}}{2} = \dfrac{28}{10} = 2.8$

Comme $E(X) = 2$, $\boxed{E(Y) = 2.8 > E(X)}$

Ce résultat est logique car si une personne est interrogée dans la rue alors celle-ci appartient à une famille qui compte au moins un enfant et les familles ne comptant aucun enfant ne sont donc aucunement prises en compte.

2. a) $\forall N \geq 1, \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{1}{E(X)} \sum_{i=1}^{N} i P([X=i]) = \frac{1}{E(X)} \sum_{i=0}^{N} i P([X=i])$

X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admet une espérance.

Alors, $\sum_{i \geq 0} i P([X=i])$ converge et sa somme vaut $E(X)$.

En faisant tendre N vers $+\infty$, on a : $\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = \frac{E(X)}{E(X)}$

Donc $\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = 1}$

b) On suppose que X admet un moment d'ordre 2.

Alors, $\sum_{i \geq 0} i^2 P([X=i])$ converge (absolument).

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $E(X) \neq 0$ donc $E(X) > 0$.

Alors, $\forall i \geq 1, |i P([X^* = i])| = \frac{1}{E(X)} i^2 P([X=i])$

Comme $\sum_{i \geq 1} i^2 P([X=i])$ converge, $\sum_{i \geq 1} i P([X^* = i])$ converge absolument et X^* admet une espérance.

$E(X^*) = \frac{1}{E(X)} \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 P([X=i]) = \frac{1}{E(X)} \sum_{i=0}^{+\infty} i^2 P([X=i])$

Ainsi, $\boxed{E(X^*) = \frac{E(X^2)}{E(X)}}$

c) On suppose que $E(X^2)$ existe. Alors $V(X)$ existe et, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^*)E(X) - (E(X))^2 \text{ d'après 2.b)}$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } E(X^2) \text{ existe, on a } V(X) = E(X)\left[E(X^*) - E(X)\right]}$

d) Par définition, $V(X) \geqslant 0$.

Donc $E(X)\left[E(X^*) - E(X)\right] \geqslant 0$. Comme $E(X) > 0$, $\boxed{E(X^*) \geqslant E(X)}$

3) a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P([X=k]) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

(i) Par définition, $E(X) = \lambda > 0$

Alors, $\forall i \geqslant 1$, $P([X^* = i]) = \dfrac{i}{\lambda} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}$

Donc, $\boxed{\forall i \geqslant 1, P([X^* = i]) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}}$

(ii) $X^*(\Omega) = (X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\forall i \geqslant 1$, $P([X+1 = i]) = P([X = i-1])$ et, comme $i-1 \geqslant 0$:

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = P([X^* = i])$$

Ainsi, $\boxed{X^* \text{ suit la même loi que } X+1}$

b) (i) $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Comme X^* et $X+1$ suivent la même loi :

$$\forall k \geq 1,\ P([X^* = k]) = P([X+1 = k])$$

$$\frac{k}{E(X)} P([X = k]) = P([X = k-1])$$

Comme $\forall k \geq 1,\ k \neq 0$,

$$\boxed{\forall k \geq 1,\ P([X = k]) = \frac{E(X)}{k} P([X = k-1])}$$

(ii) soit $\forall k \in \mathbb{N},\ H(k) : P([X = k]) = \frac{E(X)^k}{k!} P([X = 0])$

→ $k = 0$: $\frac{E(X)^0}{0!} P([X = 0]) = P([X = 0])$

$H(0)$ est vraie

→ soit $k \in \mathbb{N}$

Montrons que $H(k) \Rightarrow H(k+1)$

On suppose $H(k)$ vraie

D'après 3.b) (i), $P([X = k+1]) = \frac{E(X)}{k+1} P([X = k])$

Comme $H(k)$ vraie,

$$P([X = k+1]) = \frac{E(X)}{k+1} \times \frac{E(X)^k}{k!} P([X = 0]) = \frac{E(X)^{k+1}}{(k+1)!} P([X = 0])$$

$H(k+1)$ vraie

Par principe de récurrence,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P([X = k]) = \frac{E(X)^k}{k!} P([X = 0])}$$

(iii). On a : $\sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k]) = 1$

Donc, $P([X=0]) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E(X)^k}{k!} = 1$ i.e. $P([X=0])\, e^{E(X)} = 1$

D'où $P([X=0]) = e^{-E(X)}$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, P([X=k]) = e^{-E(X)} \frac{E(X)^k}{k!}$

D'où $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(E(X))}$

- Le paramètre d'une loi de Poisson étant toujours égal à son espérance, ce résultat est logique.

On vient de montrer avec la 3. a) et la 3. b) que X^* et $X+1$ suivent la même loi si et seulement si X suit une loi de Poisson.

4) a) (i) $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$

$$\sum_{j=1}^{n} j\, P_{[X=k]}([T=j]) = \sum_{j=1}^{k} j \times \frac{1}{k} + \sum_{j=k+1}^{n} j \times 0 = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k} j = \frac{1}{k} \times \frac{k(k+1)}{2}$$

Donc, $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} j\, P_{[X=k]}([T=j]) = \frac{k+1}{2}}$ (car vrai aussi pour $k=n$)

(ii) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j\, P([X=k])\, P_{[X=k]}([T=j])$

$= \sum_{k=1}^{n} P([X=k]) \sum_{j=1}^{n} j\, P_{[X=k]}([T=j])$

$= \sum_{k=1}^{n} P([X=k]) \times \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (k+1) P([X=k])$

On conclut d'après le théorème du transfert :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j\,P([X=k])\,P_{[X=k]}([T=j]) = \frac{E(X+1)}{2}}$$

(iii) $T(\Omega) = [\![1,n]\!]$ donc T admet une espérance et :

$$E(T) = \sum_{j=1}^{n} j\,P([T=j])$$

$([X=k])_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ P([T=j]) = \sum_{k=1}^{n} P([X=k])\,P_{[X=k]}([T=j])$$

Alors, $E(T) = \sum_{j=1}^{n} j \sum_{k=1}^{n} P([X=k])\,P_{[X=k]}([T=j])$

On peut alors conclure :

$$\boxed{E(T) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} j\,P([X=k])\,P_{[X=k]}([T=j])}$$

iv) On peut écrire,

$$E(T) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j\,P([X=k])\,P_{[X=k]}([T=j])$$

Alors, d'après 4) a) (ii), $\boxed{E(T) = \frac{E(X+1)}{2}}$

b) (i) $\forall k \in [\![1, \underline{\underline{n-1}}]\!]$

$$\sum_{j=1}^{n} j\, P_{[X^*=k]}([T^*=j]) = \sum_{j=1}^{k} j \times \frac{1}{k} + \sum_{j=k+1}^{n} j \times 0 = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} j = \frac{1}{k} \times \frac{k(k+1)}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} j\, P_{[X^*=k]}([T^*=j]) = \frac{k+1}{2}}$ (car vrai aussi pour $k=n$)

(ii) $T^*(\Omega) = [\![1, n]\!]$ donc T^* admet une espérance et :

$$E(T^*) = \sum_{j=1}^{n} j\, P([T^*=j])$$

$([X^*=k])_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles (car $\forall k \in [\![1,n]\!], P([X=k]) > 0$). D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ P([T^*=j]) = \sum_{k=1}^{n} P([X^*=k])\, P_{[X^*=k]}([T^*=j])$$

On peut alors conclure :

$$\boxed{E(T^*) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} j\, P([X^*=k])\, P_{[X^*=k]}([T^*=j])}$$

(iii) On a :

$$E(T^*) = \sum_{k=1}^{n} P([X^*=k]) \sum_{j=1}^{n} j\, P_{[X^*=k]}([T^*=j])$$ et d'après 4)b)(i)

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (k+1)\, P([X^*=k])$$

D'après le théorème du transfert, on conclut : $\boxed{E(T^*) = \frac{E(X^*+1)}{2}}$

(iv) D'après 2.d), $E(X^*) \geqslant E(X)$

i.e. $E(X^*) + 1 \geqslant E(X) + 1$ et, par linéarité de l'espérance :

$E(X^*+1) \geqslant E(X+1)$

Comme $E(T) = \frac{E(X+1)}{2}$ et $E(T^*) = \frac{E(X^*+1)}{2}$, on conclut : $\boxed{E(T^*) \geqslant E(T)}$

Partie II

5) a) $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{E(X)} f(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

f est une densité donc $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$. Comme $E(X) > 0$, on a :

$\forall x \geq 0, g(x) \geq 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$ (1)

- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points comme fonction de densité. Comme $E(X) > 0$, $g : x \mapsto \dfrac{x}{E(X)} f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. (2)
- X admet une espérance donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge et vaut $E(X)$.

Alors, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ converge et vaut $\dfrac{E(X)}{E(X)} = 1$. (3)

D'après (1), (2) et (3), on conclut :

$\boxed{g \text{ définit une densité de probabilité}}$

b) soit $a > 0$

(i) soit $Y = aX$

$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P([Y \leq x]) = P([aX \leq x])$ et, comme $a > 0$:

$$= P\left(\left[X \leq \frac{x}{a}\right]\right) = F_X\left(\frac{x}{a}\right)$$

X est une variable aléatoire à densité donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points. On notera H_1 l'ensemble correspondant à ce nombre fini de points.

Comme $x \longmapsto \frac{x}{a}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a que : F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus H_2$ où $H_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{a} \in H_1\}$.

Y est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus H_2, F_Y'(x) = \frac{1}{a} F_X'\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$

Comme la fonction $x \longmapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ est positive et coïncide sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points avec F_Y', on peut conclure :

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } aX \text{ est une variable à densité et une densité de } aX \text{ est } f_{aX} : x \longmapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)}$$

Remarque : La question invitait plutôt à une redémonstration du résultat mais gardez en tête que si X est une variable aléatoire à densité alors $Y = aX+b$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$ est aussi une variable aléatoire à densité et $x \longmapsto \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$ est une densité de Y.

iii) En notant $f_{(aX)^*}$ une densité de $(aX)^*$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{(aX)^*}(x) = \frac{x}{E(aX)} f_{aX}(x) = \frac{x}{aE(X)} \times \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a^2 E(X)} f\left(\frac{x}{a}\right)$$

En notant f_{aX^*} une densité de aX^*, on a, d'après le cours :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{aX^*}(x) = \frac{1}{|a|} g\left(\frac{x-0}{a}\right) = \frac{1}{a} \times \frac{\frac{x}{a}}{E(X)} f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a^2 E(X)} f\left(\frac{x}{a}\right)$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f_{(aX)^*}(x) = f_{aX^*}(x)$. On peut conclure :

$\boxed{(aX)^* \text{ et } aX^* \text{ possèdent la même loi}}$

c) Rappel : Théorème de transfert

si X est une variable à densité admettant une densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et si g est une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points sur $]a,b[$, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_a^b g(t) f(t)\,dt$ converge absolument et dans ce cas : $E(g(X)) = \int_a^b g(t) f(t)\,dt$

f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et h est continue sur $[0,+\infty[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. D'après le théorème du transfert, $E(Xh(X))$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} x h(x) f(x)\,dx$ converge absolument.

h est bornée sur $[0,+\infty[$ donc : $\exists M \geq 0 \mid \forall x \geq 0, |h(x)| \leq M$

Alors, $\left[\begin{array}{l}\bullet \forall x \geq 0, 0 \leq |x h(x) f(x)| \leq M x f(x) \text{ car } x f(x) \geq 0 \\ \bullet\ x \longmapsto x h(x) f(x) \text{ et } x \longmapsto M x f(x) \text{ sont continues sur} \\ [0,+\infty[\text{ sauf éventuellement en un nombre fini de points} \\ \bullet \displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx \text{ converge car } E(X) \text{ existe}\end{array}\right.$

Par critère d'encadrement, $\int_0^{+\infty} x h(x) f(x)\,dx$ converge absolument.

Ainsi, $E(Xh(X))$ existe et on a :

$$E(Xh(X)) = \int_0^{+\infty} x h(x) f(x)\,dx = E(X) \int_0^{+\infty} h(x) \frac{x}{E(X)} f(x)\,dx$$

$$= E(X) \int_0^{+\infty} h(x) g(x)\,dx$$

On a $\left[\begin{array}{l}\bullet \forall x \geq 0, 0 \leq |h(x) g(x)| \leq M g(x) \text{ car } g(x) \geq 0 \\ \bullet\ x \longmapsto h(x) g(x) \text{ et } x \longmapsto M g(x) \text{ sont continus sur } [0,+\infty[\\ \text{sauf éventuellement en un nombre fini de points} \\ \bullet \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge et vaut } 1\end{array}\right.$

Par critère d'encadrement, $\int_0^{+\infty} h(x) g(x)\,dx$ converge absolument.

Comme g est nulle sur $]-\infty, 0]$ et h est continue sur $[0,+\infty[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, d'après le théorème du transfert, $E(h(X^*))$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} h(x) g(x)\,dx$.

Alors, $E(Xh(X)) = E(X)E(h(X^*))$. Comme $E(X) \neq 0$, on conclut :

$$\boxed{E(Xh(X)) \text{ est bien définie et } E(h(X^*)) = \frac{1}{E(X)} E(Xh(X))}$$

6. a) Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

1^{er} cas : $x_1 \geq x_2$

Comme f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$, $f(x_1) \geq f(x_2)$ et $g(x_1) \geq g(x_2)$.

Donc $f(x_1) - f(x_2) \geq 0$ et $g(x_1) - g(x_2) \geq 0$.

Alors $(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0$

2ème cas : $x_1 < x_2$

Comme f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$, $f(x_1) \leq f(x_2)$ et $g(x_1) \leq g(x_2)$.

Donc $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$ et $g(x_1) - g(x_2) \leq 0$.

Alors $(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0$

On peut conclure :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0}$$

b) $(f(X_1) - f(X_2))(g(X_1) - g(X_2))$

$= f(X_1)g(X_1) - f(X_1)g(X_2) - f(X_2)g(X_1) + f(X_2)g(X_2)$

X_1 et X_2 sont indépendantes donc, d'après le lemme des coalitions,

$f(X_1)$ et $g(X_2)$ sont indépendantes et $f(X_2)$ et $g(X_1)$ sont indépendantes.

Comme $f(X)$, $g(X)$ et $f(X)g(X)$ admettent une espérance et

X_1 et X_2 suivent la même loi que X :

- $E(f(X_1)g(X_1))$ existe et vaut $E(f(X)g(X))$
- $E(f(X_1)g(X_2))$ existe et vaut $E(f(X_1))E(g(X_2)) = E(f(X))E(g(X))$ par indépendance
- $E(f(X_2)g(X_1))$ existe et vaut $E(f(X_2))E(g(X_1)) = E(f(X))E(g(X))$ par indépendance
- $E(f(X_2)g(X_2))$ existe et vaut $E(f(X)g(X))$

Ainsi, $E((f(X_1)-f(X_2))(g(X_1)-g(X_2)))$ existe et :

$$\boxed{E\Big(\big(f(X_1)-f(X_2)\big)\big(g(X_1)-g(X_2)\big)\Big) = 2E(f(X)g(X)) - 2E(f(X))E(g(X))}$$

c) soit Y la variable aléatoire constante égale à 0

et $Z = (f(X_1)-f(X_2))(g(X_1)-g(X_2))$

D'après 6)a), $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) \leq Z(\omega)$ i.e. $P([Y \leq Z]) = 1$

Par croissance de l'espérance, $E(Y) = 0 \leq E(Z)$. D'après 6)b), cela

donne : $\boxed{E(f(X)g(X)) \geq E(f(X))E(g(X))}$

7. a) soit $p \in \mathbb{N} \mid 1 \leq p \leq m$

(i) soit $x \geq 0$

<u>1er cas</u>: $x \in [0,1]$

Par croissance de $u \mapsto u^p$ sur $\mathbb{R}^+$, $0 \leq x^p \leq 1$.

Comme $x^{m+1} \geq 0$, $1 + x^{m+1} \geq 1$ et donc : $0 \leq x^p \leq 1 + x^{m+1}$

<u>2ème cas</u>: $x > 1$

$m+1 > p$ donc $m+1-p > 0$ et $x^{m+1-p} \geq 1$

Comme $x^p \geq 0$, $0 \leq x^p \leq x^{m+1} \leq 1 + x^{m+1}$

Ainsi, $\boxed{\forall x \geq 0,\ 0 \leq x^p \leq 1 + x^{m+1}}$

(ii) Remarque : Ici, on ne sait plus bien si on travaille sur des variables à densité ou discrètes. Le résultat établi à la question précédente laisse penser qu'on travaille sur des variables à densité et c'est cette hypothèse que nous allons garder dans la suite de la question 7). Nous noterons f une densité de X.

X est une variable aléatoire positive donc $\forall x < 0$, $f(x) = 0$.

Ainsi, comme $x \longmapsto x^p$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème du transfert $E(X^p)$ si et seulement si $\int_0^{+\infty} x^p f(x)\,dx$ converge absolument.

On a $\left[\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \geqslant 0,\ 0 \leq |x^p f(x)| = x^p f(x) \leq f(x) + x^{m+1} f(x) \\ \bullet\ x \longmapsto x^p f(x) \text{ et } x \longmapsto f(x) + x^{m+1} f(x) \text{ sont continues} \\ \text{sur } [0,+\infty[\text{ sauf éventuellement en un nombre fini de points} \\ \bullet\ \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge et } \int_0^{+\infty} x^{m+1} f(x)\,dx \text{ converge (car } X^{m+1} \\ \text{admet une espérance) donc } \int_0^{+\infty} \left(f(x) + x^{m+1} f(x)\right) dx \text{ converge} \end{array}\right.$

Par critère d'encadrement, $\int_0^{+\infty} x^p f(x)\,dx$ converge absolument.

Ainsi, $\boxed{E(X^p) \text{ existe}}$

b) soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$ et $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^m & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(X) = X$ admet une espérance

$\Rightarrow g(X) = X^m$ (X est une variable positive) admet une espérance

d'après 7) a) (ii) pour $p = m \in [\![1,m]\!]$

$\Rightarrow f(X)g(X) = X X^m = X^{m+1}$ admet une espérance

D'après 6.c), $E(X X^m) \geqslant E(X)E(X^m)$

Donc, $\boxed{E(X^{m+1}) \geqslant E(X)E(X^m)}$

c) une densité de X^* est $g : x \longmapsto \frac{x}{E(X)} f(x)$.

$\forall x < 0,\ g(x) = 0$

Comme $x \longmapsto x^m$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème de transfert,

$E((X^*)^m)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} x^m g(x)\,dx$ converge absolument.

$\forall x \geq 0, |x^m g(x)| = \frac{1}{E(X)} x^{m+1} f(x)$

X^{m+1} admet une espérance donc $\int_0^{+\infty} x^{m+1} f(x)\,dx$ converge absolument.

Ainsi, $E((X^*)^m)$ existe et $E((X^*)^m) = \frac{1}{E(X)} \int_0^{+\infty} x^{m+1} f(x)\,dx$

Donc, $E((X^*)^m) = \frac{E(X^{m+1})}{E(X)}$ $(*)$

D'après 7.c), on conclut : $\boxed{E((X^*)^m) \geq E(X^m)}$

Remarque : Pour obtenir $(*)$, on ne pourrait pas directement utiliser la propriété de la question 5)c) car $h : x \longmapsto x^m$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^+$

8. a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > t \\ 0 & \text{si } x \leq t \end{cases}$$

soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y$

1er cas : $x \leq y \leq t$

Alors, $g_t(x) = 0 \leq g_t(y) = 0$

2ème cas : $x \leq t < y$

Alors, $g_t(x) = 0 \leq g_t(y) = 1$

$3^{ème}$ cas : $t < x \leq y$

Alors, $g_t(x) = 1 \leq g_t(y) = 1$

Dans tous les cas, $g_t(x) \leq g_t(y)$

Ainsi, $\boxed{g_t \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

b) soit $f : x \longmapsto x$ définie et croissante sur $\mathbb{R}$, g_t est également croissante.

→ $f(X) = X$ admet une espérance

→ $\forall \omega \in \Omega$, $g_t(X(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) > t \\ 0 & \text{si } X(\omega) \leq t \end{cases}$

$g_t(X)$ est la variable aléatoire égale à 1 si l'évènement $[X > t]$ est réalisé et 0 sinon. Ainsi, $g_t(X) \hookrightarrow \mathcal{B}(P([X > t]))$. Donc $g_t(X)$ admet une espérance qui vaut $P([X > t])$.

Remarque : Là encore, pourrait-on considérer que X est une variable à densité et montrer l'existence de l'espérance de $g_t(X)$ en utilisant le théorème de transfert ?

→ g_t est bornée ($\forall x \in \mathbb{R}$, $g_t(x) \in [0,1]$) et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en t. Comme X est une variable aléatoire positive qui admet une espérance, d'après la question 5.c) et ses conséquences dans le cas discret et continu, $E(X g_t(X))$ existe.

Et, d'après 6.c), on a également :

$$E(Xg_t(X)) \geqslant E(X)E(g_t(X))$$

Ainsi, on conclut, comme $E(g_t(X)) = P([X>t])$:

$$\boxed{E(Xg_t(X)) \text{ est bien défini et } E(Xg_t(X)) \geqslant E(X)P([X>t])}$$

c) Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\forall \omega \in \Omega, \; g_t(X^*(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{si } X^*(\omega) > t \\ 0 & \text{si } X^*(\omega) \leqslant t \end{cases}$$

$g_t(X^*)$ est la variable aléatoire égale à 1 si l'événement $[X^*>t]$ est réalisé et 0 sinon. Ainsi, $g_t(X^*) \hookrightarrow \mathcal{B}(P([X^*>t]))$. Donc $g_t(X^*)$ admet une espérance qui vaut $P([X^*>t])$.

De plus, d'après la définition de la fin de la question 5.c), comme X est une variable aléatoire réelle positive qui admet une espérance $E(X)$, la fonction g_t est bornée sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en t et X^* suit la loi de X biaisée par la taille, on a :

$$E(g_t(X^*)) = \frac{1}{E(X)} E(Xg_t(X)) \text{ i.e. } P([X^*>t]) = \frac{1}{E(X)} E(Xg_t(X))$$

D'après 8.b), $E(Xg_t(X)) \geqslant E(X)P([X>t])$. On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \; P([X^*>t]) \geqslant P([X>t])}$$

9) a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i admet une espérance. Ainsi, par linéarité de l'espérance, S_n admet une espérance et :

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \quad \text{i.e.} \quad \boxed{E(S_n) = p}$$

b) On suppose que les variables aléatoires X_i ($i \in [\![1,n]\!]$) ont la même loi.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!], E(X_i) = E(X_1)$ i.e. $p_i = p_1$

Or $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ donc $np_1 = p$ et $p_1 = \frac{p}{n}$. Ainsi, $\forall i \in [\![1,n]\!], p_i = \frac{p}{n}$

Alors, $\forall k \in [\![1,n]\!], P([J=k]) = \frac{\frac{p}{n}}{p} = 1/n$ et $\boxed{J \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])}$

c)(i) soit $w \in \Omega$. $\exists i_0 \in [\![1,n]\!] / \mathbb{1}_{[J=i_0]}(w) = 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_0\}, \mathbb{1}_{[J=i]}(w) = 0$

Alors, $\forall w \in \Omega, \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[J=i]}(w) = 1$ i.e. $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[J=i]} = 1$

Ainsi, $h(T_n) = \sum_{i=1}^{n} h(T_n) \mathbb{1}_{[J=i]}$ (1)

D'où, $h(T_n) = \sum_{i=1}^{n} h(S_n - X_J + X_J^*) \mathbb{1}_{[J=i]}$

Or, de même que pour (1), $h(S_n - X_J + X_{J^*}) = \sum_{k=1}^{n} h(S_n - X_k + X_{k^*}) \mathbb{1}_{[J=k]}$

Alors, $\forall i \in [\![1,n]\!], h(S_n - X_J + X_{J^*}) \mathbb{1}_{[J=i]} = \sum_{k=1}^{n} h(S_n - X_J + X_{J^*}) \mathbb{1}_{[J=k]} \mathbb{1}_{[J=i]}$

Soit $(k,i) \in [\![1,n]\!]^2$, $k \neq i$

- soit $w \in [J=k]$. Alors, $w \notin [J=i]$ et $\mathbb{1}_{[J=k]}(w) \mathbb{1}_{[J=i]}(w) = 0$
- soit $w \in [J=i]$. Alors, $w \notin [J=k]$ et $\mathbb{1}_{[J=k]}(w) \mathbb{1}_{[J=i]}(w) = 0$
- soit $w \in \Omega \setminus ([J=k] \cup [J=i])$. Alors, $\mathbb{1}_{[J=k]}(w) \mathbb{1}_{[J=i]}(w) = 0$

Ainsi, $\forall w \in \Omega$, $\mathbb{1}_{[J=k]}(w)\mathbb{1}_{[J=i]}(w) = 0$

i.e. $\forall (k,i) \in [\![1,n]\!]^2$, $k \neq i$, $\mathbb{1}_{[J=k]}\mathbb{1}_{[J=i]} = 0$

Donc,

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $h(S_n - X_J + X_J^*)\mathbb{1}_{[J=i]} = h(S_n - X_i + X_i^*)\mathbb{1}_{[J=i]}\mathbb{1}_{[J=i]}$

or, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall w \in \Omega$, $\mathbb{1}_{[J=i]}(w)\mathbb{1}_{[J=i]}(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in [J=i] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{1}_{[J=i]}\mathbb{1}_{[J=i]} = \mathbb{1}_{[J=i]}$

Ainsi,

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $h(S_n - X_J + X_J^*)\mathbb{1}_{[J=i]} = h(S_n - X_i + X_i^*)\mathbb{1}_{[J=i]}$

On peut alors conclure:

$$\boxed{h(T_n) = \sum_{i=1}^{n} h(T_n)\mathbb{1}_{[J=i]} = \sum_{i=1}^{n} h(S_n - X_i + X_i^*)\mathbb{1}_{[J=i]}}$$

(ii) J est indépendante de $X_1, X_1^*, \dots, X_n, X_n^*$ donc, d'après le lemme des coalitions, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $h(S_n - X_i + X_i^*)$ est indépendante de $\mathbb{1}_{[J=i]}$.

Ainsi, d'après 9)c)(ii), en utilisant aussi la linéarité de l'espérance, on a:

$$E(h(T_n)) = \sum_{i=1}^{n} E(\mathbb{1}_{[J=i]})\,E(h(S_n - X_i + X_i^*))$$

De même qu'en 8)a), on montre que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $E(\mathbb{1}_{[J=i]}) = P([J=i])$

Ainsi, on conclut: $\boxed{E(h(T_n)) = \sum_{i=1}^{n} P([J=i])\,E(h(S_n - X_i + X_i^*))}$

d) soit $i \in [\![1,n]\!]$, $s \in \mathbb{R}$

$x \longmapsto h(s+x)$ est bornée et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Par définition de la loi biaisée par la taille, on a :

$$E(h(s+X_i^*)) = \frac{1}{E(X_i)} E(X_i h(s+X_i))$$

Comme $\mu_i = E(X_i)$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \forall s \in \mathbb{R}, E(h(s+X_i^*)) = \frac{1}{\mu_i} E(X_i h(s+X_i))}$$

e) D'après 9)c)(ii) et le résultat admis à l'issue de la question 9) d), on a :

$$E(h(T_n)) = \sum_{i=1}^{n} P([J=i]) \frac{1}{\mu_i} E(X_i h(S_n))$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(h(T_n)) = E\left(\sum_{i=1}^{n} P([J=i]) \frac{1}{\mu_i} X_i h(S_n)\right)$$

et, comme $\forall i \in [\![1,n]\!], P([J=i]) = \frac{\mu_i}{\mu} = \frac{\mu_i}{E(S_n)}$:

$$E(h(T_n)) = E\left(\frac{1}{E(S_n)} h(S_n) \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{E(S_n)} E(S_n h(S_n))$$

Ainsi, $\boxed{E(h(T_n)) = E(S_n h(S_n)) / E(S_n)}$

f) Le résultat 9)e) est valable pour toute fonction h bornée et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. $\boxed{T_n \text{ suit la loi de } S_n \text{ biaisée par la taille}}$

Partie III

10) a) soit $(a_1, \dots, a_m)$ un m-uplet d'entiers distincts de $[\![1, n]\!]$

$$P(S = (a_1, \dots, a_m)) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

• Nombre de cas favorables:

- On choisit s_1 égal à a_1 : 1 choix
- On choisit s_2 égal à a_2 : 1 choix

⋮

- On choisit s_m égal à a_m : 1 choix

Il y a $1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$ cas favorable

• Nombre de cas possibles:

- On choisit s_1 dans $[\![1, n]\!]$: n choix
- On choisit s_2 dans $[\![1, n]\!] \setminus \{s_1\}$: $n-1$ choix

⋮

- On choisit s_m dans $[\![1, n]\!] \setminus \{s_1, \dots, s_{m-1}\}$ $= n-(m-1) = n-m+1$ choix

Il y a $n \times (n-1) \times \dots \times (n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ cas possibles

Alors,

$$P(S = (a_1, \dots, a_m)) = \frac{1}{\frac{n!}{(n-m)!}}$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout m-uplet } (a_1, \dots, a_m) \text{ d'entiers distincts de } [\![1, n]\!],\quad P(S = (a_1, \dots, a_m)) = \frac{(n-m)!}{n!}}$$

(iii). soit un ensemble $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset [\![1,n]\!]$ de cardinal m.

$$P(R=A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

• Nombre de cas favorables :

→ Au 1er choix, on choisit un élément de A : m choix

→ Au 2ème choix, on choisit un élément de A différent du précédent : (m-1) choix

⋮

→ Au mème choix, on choisit un élément de A différent de tous les précédents : 1 choix

Il y a $m \times (m-1) \times \dots \times 1 = m!$ cas favorables

• Nombre de cas possibles :

→ Au 1er choix, on choisit un élément de $[\![1,n]\!]$: n choix

→ Au 2ème choix, on choisit un élément de $[\![1,n]\!]$ différent du précédent : (n-1) choix

⋮

→ Au mème choix, on choisit un élément de $[\![1,n]\!]$ différent de tous les précédents : $n-(m-1) = n-m+1$ choix

Il y a $n \times (n-1) \times \dots \times (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$ cas possibles

Ainsi, on conclut :

$$\boxed{\text{Pour tout ensemble } A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset [\![1,n]\!],\ P(R=a) = \frac{m!(n-m)!}{n!}}$$

• $\frac{m!(n-m)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{m}}$

Donc $\boxed{\text{R a été choisi uniformément dans } P_m}$

b) $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, F_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

• $\Rightarrow$ soit $\omega \in \Omega$

On a $U(\omega) \in [0,1[$ i.e. $nU(\omega) \in [0,n[$

Ainsi, $\lfloor nU(\omega) \rfloor \in [\![0,n-1]\!]$ et $X(\omega) \in [\![1,n]\!]$

Donc $X(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$

$\Rightarrow$ Réciproquement, soit $k \in [\![1,n]\!]$

$U(\Omega) = [0,1[$ donc, comme $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[\subset [0,1[$, on a :

$\exists \omega \in \Omega \mid U(\omega) \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[$. D'où, $\exists \omega \in \Omega \mid nU(\omega) \in [k-1, k[$

i.e. $\exists \omega \in \Omega \mid \lfloor nU(\omega) \rfloor = k-1$ i.e. $\exists \omega \in \Omega \mid X(\omega) = k$

On vient de montrer : $\forall k \in [\![1,n]\!], \exists \omega \in \Omega \mid X(\omega) = k$

Ainsi, $[\![1,n]\!] \subset X(\Omega)$

Par double inclusion, on conclut : $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$

• $\forall k \in [\![1,n]\!], P([X=k]) = P([k-1 \leq nU < k])$ et, comme $n > 0$

$= P([\frac{k-1}{n} \leq U < \frac{k}{n}]) = F_U(\frac{k}{n}) - F_U(\frac{k-1}{n})$

Comme $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{k}{n} \in [0,1]$ et $\frac{k-1}{n} \in [0,1]$,

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P([X=k]) = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$

Ainsi, $\boxed{\text{si } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[) \text{ alors } X = 1 + \lfloor nU \rfloor \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])}$

c) On peut écrire le script suivant :

```
function x = Uniforme(n)
    x = 1 + floor(n*rand())
endfunction
```

d) On peut écrire le script suivant :

```
function [x,W] = Selection(V)
    n = length(V)
    k = Uniforme(n)
    x = V(k)
    W = [V(1:k-1), V(k+1:n)]
endfunction
```

e) On peut compléter le programme ainsi :

```
function R = choix(m,n)
    V = 1:n
    R = [ ]
    for i = 1:m
        [x,w] = Selection(V)
        R = [R,x]
        V = w
    end
endfunction
```

11) a) (i) Comme R est à valeurs dans P_m, on peut écrire :

$$E(X) = E(\bar{x}_R) = \sum_{A \in P_m} \bar{x}_A P(R = A)$$

$\forall A \in P_m, P(R = A) = 1/\binom{n}{m}$. On peut donc conclure :

$$\boxed{E(X) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{A \in P_m} \bar{x}_A}$$

(ii) Soit $i \in [\![1,n]\!]$

Une partie A de P_m à laquelle i appartient contient $(m-1)$ autres éléments sélectionnés dans l'ensemble $[\![1,n]\!] \setminus \{i\}$ qui contient $(n-1)$ éléments.

Ainsi, $\boxed{\text{il y a } \binom{n-1}{m-1} \text{ parties } A \in P_m \text{ telles que } i \in A}$

(iii) On note $D_i = \{A \in P_m \mid i \in A\}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

Alors, $\displaystyle\sum_{A \in P_m} \sum_{i \in A} x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{A \in D_i} x_i$. Comme $\mathrm{card}(D_i) = \binom{n-1}{m-1}$

pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ d'après 11) a) (ii), on conclut :

$$\boxed{\sum_{A \in P_m} \sum_{i \in A} x_i = \binom{n-1}{m-1} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

(iv) D'après 11) a) (i), $E(X) = \binom{n}{m}^{-1} \displaystyle\sum_{A \in P_m} \bar{x}_A$

i.e. $E(X) = \binom{n}{m}^{-1} \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{A \in P_m} \sum_{i \in A} x_i$

et, d'après 11) a) (iii), $E(X) = \binom{n}{m}^{-1} \times \dfrac{1}{m} \times \binom{n-1}{m-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$

Or, $\binom{n-1}{m-1} = \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} = \dfrac{m}{n} \times \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!} = \dfrac{m}{n} \binom{n}{m}$

Donc, $E(X) = \binom{n}{m}^{-1} \times \dfrac{1}{m} \times \dfrac{m}{n} \times \binom{n}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Ainsi, $\boxed{E(X) = \bar{x}}$

(v) Par définition, $\theta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \dfrac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i} = \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}$

D'après la question précédente, on conclut : $\boxed{\theta = \dfrac{E(Y)}{E(X)}}$

b) On a $\theta_R = \frac{\bar{y}_R}{\bar{x}_R}$ et, comme $Y = \bar{y}_R$ et $X = \bar{x}_R$, on conclut :

$$\boxed{E(\theta_R) = E\left(\frac{Y}{X}\right)}$$

4) (i) → X est une variable aléatoire strictement positive admettant une espérance.

Ainsi, $\sqrt{X}$ est une variable aléatoire strictement positive admettant un moment d'ordre 2.

→ $\frac{1}{\sqrt{X}}$ est une variable aléatoire finie. Elle admet donc un moment d'ordre 2. De plus, elle est strictement positive.

• D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$E\left(\sqrt{X} \times \frac{1}{\sqrt{X}}\right) \leqslant \sqrt{E(X)} \times \sqrt{E\left(\frac{1}{X}\right)}$$

i.e. $0 \leqslant 1 = E(1) \leqslant \sqrt{E(X) \times E\left(\frac{1}{X}\right)}$

Par croissance de $u \longmapsto u^2$ sur $[0, +\infty[$, on a :

$1 \leqslant E(X) E\left(\frac{1}{X}\right)$. Comme $E(X) > 0$, on conclut :

$$\boxed{E(1/X) \geqslant 1/E(X)}$$

(ii) D'après l'énoncé, il y a égalité si et seulement si $\exists \alpha > 0 \,/\, \sqrt{X} = \alpha \frac{1}{\sqrt{X}}$

c'est-à-dire si et seulement si $\exists \alpha > 0 \,/\, X = \alpha$.

Ainsi, on conclut :

$$\boxed{\text{Il y a égalité si et seulement si } X \text{ est une variable aléatoire constante}}$$

(iii). • On suppose que $E(1/X) = 1/E(X)$.

D'après 11) c) (iii), $X = E(X) = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Comme $X = \bar{x}_R$ et R est à valeurs dans P_m, on a :

$\forall A \in P_m, \bar{x}_A = \frac{1}{m}\sum_{i\in A} x_i = \bar{x}$ (1)

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et P une partie de $[\![1,n]\!]\setminus\{i,j\}$ de cardinal $(m-1)$.

On a $(P\cup\{i\}, P\cup\{j\}) \in P_m^2$ donc, d'après (1) :

$$\frac{1}{m}\sum_{s\in P\cup\{i\}} x_s = \frac{1}{m}\sum_{s\in P\cup\{j\}} x_s$$

i.e. $\sum_{s\in P} x_s + x_i = \sum_{s\in P} x_s + x_j$ i.e. $x_i = x_j$

Ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, x_i = x_j$. Comme $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, on a :

$\forall i \in [\![1,n]\!], x_i = \bar{x}$

• On suppose que $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i = \bar{x}$

Alors, $X = \frac{1}{m}\sum_{i\in R} \bar{x} = \bar{x}$ par définition de P_m. D'après 11) c) (iii), on a :

$E(1/X) = 1/E(X)$

On conclut :

$$\boxed{E(1/X) = 1/E(X) \text{ si et seulement si } x_i = \bar{x} \text{ pour tout } i \in [\![1,n]\!]}$$

d) On suppose que X et Y sont indépendantes.

D'après le lemme des coalitions, $\frac{1}{X}$ et Y sont indépendantes.

D'après 11)b), $E(\theta_R) = E\left(\frac{Y}{X}\right) = E\left(Y \cdot \frac{1}{X}\right) = E(Y)E\left(\frac{1}{X}\right)$

D'après 11)c)(i), $E(1/X) \geqslant 1/E(X)$. Comme $E(Y) = \bar{y} > 0$, on a :

$E(\theta_R) \geqslant \dfrac{E(Y)}{E(X)}$ avec égalité si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$x_i = \bar{x}$ d'après 11)c)(iii).

$\theta = \dfrac{E(Y)}{E(X)}$ d'après 11)a)(v). On conclut alors :

$$\boxed{\text{si on suppose que } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes, } E(\theta_R) \geqslant \theta \text{ avec égalité si et seulement si } x_i = \bar{x} \text{ pour tout } i \in [\![1,n]\!]}$$

12) a) (i) $([J=i])_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(R=A) = \sum_{i=1}^{n} P(J=i)\, P_{[J=i]}(R=A)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(J=i)\, P_{[J=i]}(V \cup \{J\} = A)$$

Or $\forall i \in [\![1,n]\!] \setminus A$, $P_{[J=i]}(V \cup \{J\} = A) = 0$ par définition de V

Donc, $P(R=A) = \sum_{i \in A} P(J=i) P_{[J=i]}(V \cup \{J\} = A)$

Comme on choisit un groupe V de $(m-1)$ clients parmi les $(n-1)$ clients différents de J, on peut conclure :

$$\boxed{P(R=A) = \sum_{i \in A} P(J=i) P_{[J=i]}(V = A \setminus \{i\})}$$

(iii) D'après 1.2) a) (i) et les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$P(R=A) = \sum_{i \in A} \frac{x_i}{\sum_{r=1}^{n} x_r} \times \frac{1}{\binom{n-1}{m-1}}$$

Comme $\sum_{r=1}^{n} x_r = n\bar{x}$, on a : $P(R=A) = \frac{1}{n\bar{x}} \times \frac{1}{\binom{n-1}{m-1}} \sum_{i \in A} x_i$

$\sum_{i \in A} x_i = m\bar{x}_A$ donc, on en obtient :

$$P(R=A) = \frac{1}{\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}} \times \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}}$$

Or, $\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1} = \frac{n}{m} \times \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$

On peut ainsi conclure :

$$\boxed{P(R=A) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}}}$$

13) a) Comme R est à valeurs dans P_m, on peut écrire :

$$E(\hat{\theta}_R) = \sum_{A \in P_m} \frac{\bar{y}_A}{\bar{x}_A} P(R=A)$$ et, d'après 12) a) (ii) :

$$= \sum_{A \in P_m} \frac{\bar{y}_A}{\bar{x}_A} \times \frac{1}{\binom{n}{m}} \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}}$$

Ainsi, on peut conclure :

$$\boxed{E(\hat{\theta}_R) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{A \in P_m} \frac{\bar{y}_A}{\bar{x}}}$$

b) Comme d'après 11) a) (ii) et 11) a) (iv), $\bar{x} = E(X) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{A \in P_m} x_A$ et $E(Y) = \bar{y}$, on a :

$$E(Y) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{A \in P_m} y_A$$

Ainsi, d'après 12) a) (ii), $E(\hat{\theta}_R) = \frac{E(Y)}{E(X)}$

D'après 11) a) (v), $\theta = \frac{E(Y)}{E(X)}$ ce qui permet de conclure : $\boxed{E(\hat{\theta}_R) = \theta}$