HEC 2020 S2

Partie 1

1. soit $x \in]0,1[$

a) On a $\left[\begin{array}{l} \bullet\ \forall k \geq 1,\ 0 \leq \dfrac{x^k}{k} \leq x^k \\ \bullet\ \sum\limits_{k \geq 0} x^k \text{ converge (série géométrique avec } |x|<1 \text{ convergente)} \end{array}\right.$

Par critère de comparaison, on conclut :

$$\boxed{\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k} \text{ converge}}$$

b) soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,1[$

$t \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} t^k = \frac{1-t^m}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^m}{1-t}$

On conclut : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0,1[,\ \dfrac{1}{1-t} = \dfrac{t^m}{1-t} + \sum\limits_{k=0}^{m-1} t^k}$

c) soit $m \in \mathbb{N}^*$

$\forall t \in [0,x],\ 0 \leq t^m \leq x^m$ par croissance de $u \longmapsto u^m$ sur $[0,+\infty[$

$$0 \leq \frac{t^m}{1-t} \leq \frac{x^m}{1-t} \text{ car } \frac{1}{1-t} > 0$$

Comme $\left[\begin{array}{l} \bullet \text{ les fonctions en présence sont continues sur } [0,x] \\ \bullet\ x > 0 \end{array}\right.$

par croissance de l'intégration,

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq x^n \int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

i.e. $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq x^n \Big[-\ln(|1-t|)\Big]_0^x$

i.e. $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t} \leq -x^n \ln(1-x)$

$x \in]0,1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -x^n \ln(1-x) = 0$.

Par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0}$

Remarque : On pouvait aussi choisir d'encadrer $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$ sur $[0,x]$ pour obtenir ce résultat. C'est ainsi que nous avons traité cette question dans le corrigé MyPrepa de l'EDHEC S 2020 (cette question est en effet tombée deux fois cette année aux concours...). N'hésitez pas à vous y reporter !

d) soit $n \in \mathbb{N}^*$

D'après 1)b), $\forall t \in]0,1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \dfrac{t^n}{1-t} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k$

on a $0^0 = 1$ et $\forall k \geq 1$, $0^k = 0$. Ainsi l'égalité précédente reste vraie pour $t = 0$ (on a : $1 = 0 + 1$). Donc :

$$\forall t \in [0,1[, \ \frac{1}{1-t} = \frac{t^n}{1-t} + \sum_{k=0}^{n-1} t^k$$

Les fonctions en présence sont continues sur $[0,x]$ donc, en intégrant entre 0 et x, par linéarité de l'intégration :

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k dt$$

i.e. $\left[-\ln(1-t)\right]_0^x = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x$

i.e. $-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1}$

i.e. $-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$

Comme $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge d'après 1.a) et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0$

d'après 1.b), on peut conclure, en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)}$$

2.a) $\forall x \in [-c,c], \ 0 \leq |x| \leq c$

Par croissance de $u \longmapsto u^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sur $[0,+\infty[$, on a :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-c,c], \ 0 \leq |x|^k \leq c^k$ et, comme $|a_k| \geq 0$:

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-c, c], 0 \leq |a_k x^k| \leq |a_k| c^k = |a_k c^k|$ car $c > 0$

On a $\begin{cases} \cdot \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-c,c], 0 \leq |a_k x^k| \leq |a_k c^k| \\ \cdot \sum_{k \geq 0} a_k c^k \text{ converge absolument par hypothèse} \end{cases}$

Par critère de comparaison, $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ converge absolument pour tout $x \in [-c, c]$. Ainsi, pour tout $x \in [-c, c]$, $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ converge.

On peut conclure :

$$\boxed{f : x \longmapsto a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k \text{ est bien définie sur le segment } [-c, c]}$$

b) soit $x \in [-c, c]$, $N \geq m+1$

Par inégalité triangulaire, on a :

$$\left| \sum_{k=m+1}^{N} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{N} |a_k x|^k = \sum_{k=m+1}^{N} |a_k| |x|^k$$

$$= |x|^{m+1} \sum_{k=m+1}^{N} |a_k| |x|^{k-m-1}$$

$x \in [-c, c]$ donc $0 \leq |x| \leq c$.

Pour tout $k \geq m+1$, $k-m-1 \geq 0$ donc $u \longmapsto u^{k-m-1}$ est constante sur $[0, +\infty[$ si $k = m+1$ et croissante sur $[0, +\infty[$ si $k > m+1$.

Ainsi, $\forall k \geq m+1$, $|x|^{k-m-1} \leq c^{k-m-1}$ et, comme $|x|^{m+1} |a_k| \geq 0$:

$\forall k \geq m+1$, $|x|^{m+1} |a_k| |x|^{k-m-1} \leq |x|^{m+1} |a_k| c^{k-m-1}$

En sommant entre $k = m+1$ et N, par transitivité, on obtient :

$$\left| \sum_{k=m+1}^{N} a_k x^k \right| \leq |x|^{m+1} \sum_{k=m+1}^{N} |a_k| c^{k-m-1} \quad (1)$$

D'après 2) a), $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ converge donc le reste $\sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k x^k$ existe.

De même, $\sum_{k \geq 0} |a_k| c^k$ converge donc le reste $\sum_{k=m+1}^{+\infty} |a_k| c^k$ existe.

D'où, $M_m = \sum_{k=m+1}^{+\infty} |a_k| c^{k-m-1} = \frac{1}{c^{m+1}} \sum_{k=m+1}^{+\infty} |a_k| c^k$ existe.

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans (1), on conclut :

$$\boxed{\forall x \in [-c, c], \left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq M_m |x|^{m+1}}$$

c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in [-c, c] \setminus \{0\}$, $|x|^m > 0$. Ainsi, d'après 2) b),

$$\forall x \in [-c,c] \setminus \{0\}, 0 \leq \left| \frac{\sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k x^k}{x^m} \right| \leq M_m |x|$$

$\lim_{x \to 0} M_m |x| = 0$. Alors, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k x^k}{x^m}\right| = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k x^k}{x^m} = 0$$

D'où, $\sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k x^k \underset{0}{=} o(x^m)$.

Or $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k x^k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k x^k$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \ f(x) \underset{0}{=} a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k x^k + o(x^m)}$$

d) On suppose que f est nulle sur l'intervalle $]0, c]$

Méthode 1 :

$\forall x \in]0, c], f(x) = 0$. Donc, d'après 2) c),

$\forall m \in \mathbb{N}^*, \ a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k x^k \underset{0^+}{=} o(x^m)$ (1)

1er cas : $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} = \emptyset$

Dans ce cas, on obtient : $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = 0$

2ème cas : $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} \neq \emptyset$

Alors, $\exists k_0 \in \mathbb{N} \mid k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $k_0 \in [\![0, m]\!]$.

On a : $a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k x^k \sim a_{k_0} x^{k_0}$

D'après (1), $a_{k_0} x^{k_0} \underset{0^+}{=} o(x^m)$ i.e. $\lim_{x \to 0^+} a_{k_0} \frac{x^{k_0}}{x^m} = 0$

Comme $a_{k_0} \neq 0$, $\lim_{x \to 0^+} x^{k_0 - m} = 0$

→ si $k_0 - m < 0$ i.e. $k_0 < m$ alors $\lim_{x \to 0^+} x^{k_0 - m} = +\infty$: contradiction

→ si $k_0 = m$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^{k_0 - m} = x^0 = 1$ i.e. $\lim_{x \to 0^+} x^{k_0 - m} = 1$.
On a encore une contradiction.

Ainsi, $k_0 \notin [\![0, m]\!]$ et $k_0 > m$.

D'où $a_m = 0$. Comme m est quelconque dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = 0$.

Or, $\forall x \in]0, c]$, $f(x) = 0 = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$. Donc, $a_0 = 0$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = 0$.

Dans tous les cas, on conclut :

$\boxed{\text{Si } f \text{ est nulle sur }]0, c], \text{ alors } (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est la suite nulle}}$

Méthode 2 :

soit $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) : a_k = 0$

$\to$ $k = 0$:

D'après 2.c), pour $m = 1$, on a :

$a_0 + a_1 x \underset{0^+}{=} o(x)$ i.e. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{a_0 + a_1 x}{x} = 0$

i.e. $\lim\limits_{x \to 0^+} a_1 + \dfrac{a_0}{x} = 0$

si $a_0 \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{a_0}{x} = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} a_1 + \dfrac{a_0}{x} = +\infty$: contradiction par unicité de la limite

Ainsi $a_0 = 0$ (on en déduit même que $a_1 = 0$ mais cela n'est pas nécessaire pour initialiser la récurrence).

$P(0)$ vraie

$\to$ soit $k \in \mathbb{N}$

On suppose que $P(0), P(1), \dots, P(k)$ sont vraies

Alors $\forall s \in [\![0, k]\!]$, $a_s = 0$

D'après 2.c), pour $m = k+1 \geq 1$, $a_0 + \sum\limits_{s=1}^{k+1} a_s x^s \underset{0^+}{=} o(x^{k+1})$

D'où $a_{k+1} x^{k+1} \underset{0^+}{=} o(x^{k+1})$

i.e. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{a_{k+1} x^{k+1}}{x^{k+1}} = 0$ i.e. $\lim\limits_{x \to 0^+} a_{k+1} = 0$

Comme a_{k+1} ne dépend pas de x, on a : $a_{k+1} = 0$.

$P(k+1)$ vraie

Par principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$

Ainsi, $\boxed{\text{si } f \text{ est nulle sur }]0, c], \text{ alors } (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est la suite nulle}}$

Partie 2

3. soit $\theta \in \Theta$

a) on peut dire que :

$$\boxed{\text{Lorsque } (\Omega, \mathcal{A}) \text{ est muni de la probabilité } P^{\theta},\ X \hookrightarrow \mathcal{G}(\theta)}$$

b). On a
- $\bar{X} = \varphi_1(X_1, \dots, X_n)$ où φ_1 est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ indépendante du paramètre $1/\theta$ à estimer
- $X_1, \dots, X_n$ sont n variables mutuellement indépendantes et de même loi

Ainsi, $\bar{X}$ est un estimateur de $1/\theta$.

- Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i admet une espérance qui vaut $E^{\theta}(X) = 1/\theta$.

Par linéarité de l'espérance, $\bar{X}$ admet une espérance et :

$$E^{\theta}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E^{\theta}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta} = 1/\theta$$

On conclut : $\boxed{\bar{X} \text{ est un estimateur sans biais du paramètre } 1/\theta}$

c) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i admet une variance qui vaut $V^{\theta}(X) = \frac{1-\theta}{\theta^2}$.

Comme $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, $\bar{X}$ admet une variance et $V^{\theta}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V^{\theta}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\theta}{\theta^2} = \frac{1-\theta}{n\theta^2}$

Comme le biais de $\bar{X}$ est nul d'après 3)b), on peut conclure :

$$\boxed{\text{Le risque quadratique de } \bar{X} \text{ est } \frac{1-\theta}{n\theta^2}}$$

4) a) • $\forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i(\Omega) = X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Ainsi, la variable aléatoire T est bien définie.

• soit $\theta \in \Theta$

D'après le théorème du transfert, on a :

$\frac{1}{X}$ admet une espérance si et seulement si $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} P^\theta([X=k])$ converge absolument

i.e. si et seulement $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} P^\theta([X=k])$ converge car $\frac{1}{k} P^\theta([X=k]) \geq 0$ pour tout $k \geq 1$.

On a : $\forall k \geq 1,\ \frac{1}{k} P^\theta([X=k]) = \frac{(1-\theta)^{k-1}}{k}\theta = \frac{\theta}{1-\theta} \times \frac{(1-\theta)^k}{k}$

$\theta \in]0,1[$ donc $(1-\theta) \in]0,1[$.

Alors, d'après 1.d), $\sum_{k\geq 1} \frac{(1-\theta)^k}{k}$ converge et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-\theta)^k}{k} = -\ln(1-(1-\theta)) = -\ln(\theta)$$

Ainsi, $\frac{1}{X}$ admet une espérance et $E^\theta\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{-\theta\ln(\theta)}{1-\theta} = \frac{\theta\ln(\theta)}{\theta-1}$

• Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{X_i}$ admet une espérance qui vaut $E^\theta\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\theta\ln(\theta)}{\theta-1}$.

Par linéarité de l'espérance, T admet une espérance et :

$$E^\theta(T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E^\theta\left(\frac{1}{X_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\theta\ln(\theta)}{\theta-1} = \frac{\theta\ln(\theta)}{\theta-1}$$

Ainsi, $\boxed{\forall \theta \in \Theta,\ E^{\theta}(T) = \dfrac{\theta \ln(\theta)}{\theta - 1}}$

b). On a
- $T = \varphi_2(X_1, \dots, X_n)$ où φ_2 est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ indépendante du paramètre θ à estimer
- $X_1, \dots, X_n$ sont n variables mutuellement indépendantes et de même loi

Ainsi, T est un estimateur de θ

- Le biais de T est $b_{\theta}(T) = E^{\theta}(T) - \theta = \dfrac{\theta \ln(\theta)}{\theta - 1} - \theta$ d'après A.a)

i.e. $b_{\theta}(T) = \dfrac{\theta}{\theta - 1} \times [\ln(\theta) - \theta + 1]$

Soit $\varphi : u \longmapsto \ln(u)$ définie sur $]0, +\infty[$

$\varphi \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[, \mathbb{R})$

$\forall u > 0,\ \varphi'(u) = \dfrac{1}{u}$ et $\varphi''(u) = -\dfrac{1}{u^2} < 0$

Donc φ est strictement concave sur $]0,+\infty[$. $\mathcal{C}_{\varphi}$ est située strictement au-dessous de sa tangente en 1 d'équation $y = \varphi'(1)(u-1) + \varphi(1) = u - 1$ sur $]0,+\infty[\setminus \{1\}$.

D'où $\forall u \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \ln(u) < u - 1$

Comme $\theta \in]0,1[$, $\ln(\theta) < \theta - 1$ i.e. $\ln(\theta) - \theta + 1 < 0$

De plus, $\dfrac{\theta}{\theta - 1} < 0$ donc $b_{\theta}(T) > 0$

Ainsi, $\boxed{T \text{ est un estimateur de } \theta \text{ dont le biais est strictement positif}}$

5. soit $(x_1, \dots, x_n) \in B^n =]0,1[^n$

a) soit $\theta \in \Theta =]0,1[$

$\forall i \in [\![1,n]\!], P^\theta([X_i = x_i]) = (1-\theta)^{x_i - 1} \theta > 0$

Ainsi, $\ln(L(x_1, \dots, x_n, \theta))$ existe.

On a $\ln(L(x_1, \dots, x_n, \theta)) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} [(1-\theta)^{x_i-1} \theta]\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} [\ln((1-\theta)^{x_i-1}) + \ln(\theta)]$

$= n\ln(\theta) + \ln(1-\theta)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)\right)$

On conclut :

$$\boxed{\forall \theta \in \Theta =]0,1[, \ln(L(x_1, \dots, x_n, \theta)) = n\ln(\theta) - \left[n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right]\ln(1-\theta)}$$

b) On suppose que les x_i ($i \in [\![1,n]\!]$) ne sont pas tous égaux à 1.

On note $g : \theta \longmapsto n\ln(\theta) - [n - \sum_{i=1}^{n} x_i]\ln(1-\theta)$ définie sur $]0,1[$.

g est dérivable sur $]0,1[$

$\forall \theta \in]0,1[, g'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \left[n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right] \times \frac{-1}{1-\theta}$

$= \dfrac{n(1-\theta) + \theta\left[n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right]}{\theta(1-\theta)}$

$= \dfrac{n - n\theta + n\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta(1-\theta)} = \dfrac{n - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta(1-\theta)}$

$\forall \theta \in]0,1[,\ \theta(1-\theta) > 0$

Donc
$$\begin{cases} \cdot\ g'(\theta) > 0 \iff n - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i > 0 \iff \theta < \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} & \text{car } \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i > 0 \\ \cdot\ g'(\theta) < 0 \iff \theta > \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \\ \cdot\ g'(\theta) = 0 \iff \theta = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{cases}$$

Comme $B = \mathbb{N}^*$, $\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \geq 1$

Donc $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = n \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = 1$

Comme on suppose que les x_i ($i \in [\![1,n]\!]$) ne sont pas tous égaux à 1, $\sum_{i=1}^{n} x_i > n$. Donc, $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \in]0,1[$.

Ainsi, g est strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}, 1\right[$.

Donc g admet un maximum sur $]0,1[$ atteint en un unique point d'abscisse $\theta_0 = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$.

Ainsi, $\forall \theta \in]0,1[\setminus \{\theta_0\},\ g(\theta) < g(\theta_0)$

$$\ln(L(x_1, \dots, x_n, \theta)) < \ln(L(x_1, \dots, x_n, \theta_0))$$

Par stricte croissance de $u \longmapsto e^u$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall \theta \in]0,1[\setminus \{\theta_0\}, \ L(x_1,\dots,x_n,\theta) < L(x_1,\dots,x_n,\theta_0)$$

Comme $\theta_0 \in]0,1[$, on conclut :

$\boxed{\text{Lorsque les } x_i \text{ ne sont pas tous égaux à } 1 \text{, le nombre } \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \text{ est l'unique valeur de } \theta \text{ qui maximise } L(x_1,\dots,x_n,\theta).}$

6. On note U la variable aléatoire $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$

a) Soit $\theta \in \Theta =]0,1[$ et $k \geqslant n$

$$\theta - \theta^2\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{\theta}\right) + \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\,dt$$

$$= \theta - \frac{k}{n}\theta^2 + \theta + \frac{2k}{n}\int_{1/\theta}^{k/n} \frac{dt}{t^3} - 2\int_{1/\theta}^{k/n} \frac{dt}{t^2}$$

$$= 2\theta - \frac{k}{n}\theta^2 + \frac{2k}{n}\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_{1/\theta}^{k/n} - 2\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_{1/\theta}^{k/n}$$

$$= 2\theta - \frac{k}{n}\theta^2 + \frac{k}{n}\left[\theta^2 - \frac{n^2}{k^2}\right] + 2\left[\frac{n}{k} - \theta\right]$$

$$= 2\theta - \frac{k}{n}\theta^2 + \frac{k}{n}\theta^2 - \frac{n}{k} + \frac{2n}{k} - 2\theta = \frac{n}{k}$$

Ainsi, $\boxed{\forall \theta \in \Theta =]0,1[, \forall k \geqslant n, \ \frac{n}{k} = \theta - \theta^2\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{\theta}\right) + \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\,dt}$

b) • On a
- $U = \varphi_3(X_1,\dots,X_n)$ où φ_3 est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ indépendante du paramètre θ à estimer
- $X_1,\dots,X_n$ sont n variables mutuellement indépendantes et de même loi

Ainsi, U est un estimateur de θ.

• soit $\theta \in \Theta =]0,1[$

$\forall i \in [\![1,n]\!], X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$.

Ainsi, d'après le théorème de transfert, U admet une espérance si et seulement si $\sum_{k \geq n} \frac{n}{k} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)$ converge absolument i.e. si et seulement si $\sum_{k \geq n} \frac{n}{k} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)$ converge car pour tout $k \geq n$, $\frac{n}{k} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \geq 0$.

On remarque que : $\forall k \geq n$, $\frac{n}{k} \in [0,1]$

On a
- $\forall k \geq n$, $0 \leq \frac{n}{k} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \leq P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)$
- $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$ donc $\sum_{k \geq n} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)$ converge et sa somme vaut 1 par définition d'une loi de probabilité

Par critère de comparaison, $\sum_{k \geq n} \frac{n}{k} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)$ converge.

Donc, U admet une espérance.

Par linéarité de l'espérance, $U - \theta$ admet également une espérance.

On a $b_\theta(U) = E^\theta(U) - \theta = E^\theta(U - \theta)$

Comme $E^\theta(U - \theta)$ existe, d'après le théorème de transfert, on a :

$$b_\theta(U) = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{n}{k} - \theta\right) P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \text{ et, d'après 6.a)}$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} \left[-\theta^2\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{\theta}\right) + \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\,dt\right] P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)$$

→ Par linéarité de l'espérance, comme $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\theta)$, on a :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \frac{n}{\theta}$$

$$\text{i.e. } \sum_{k=n}^{+\infty} k\, P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) = \frac{n}{\theta}$$

→ Par définition d'une loi de probabilité, $\sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) = 1$

→ Si la somme de trois séries convergent et que deux séries convergent individuellement alors la troisième série converge individuellement.

Donc $\sum_{k \geq n} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\,dt$ converge

Alors, on a :

$$b_\theta(U) = -\frac{\theta^2}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} k\, P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) + \theta \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)$$

$$+ \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\,dt$$

$$= \underbrace{-\frac{\theta^2}{n} \times \frac{n}{\theta} + \theta \times 1}_{=0} + \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\,dt$$

On conclut :

$\boxed{\begin{array}{l} V \text{ est un estimateur de } \theta \text{ dont le biais } b_\theta(V) \text{ est donné par :} \\ \forall \theta \in \Theta, b_\theta(V) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right) \frac{2}{t^3} dt \end{array}}$

c) soit $\theta \in \Theta =]0,1[$

• soit $k \in [\![n, +\infty [\![$

$\theta \in]0,1[$ donc $\frac{n}{\theta} \geqslant n$ i.e. $\lfloor \frac{n}{\theta} \rfloor \geqslant n$ (1)

1er cas : $k \geqslant \lfloor \frac{n}{\theta} \rfloor + 1$

Alors, $k > \frac{n}{\theta}$ i.e. $\frac{k}{n} > \frac{1}{\theta}$

On a : $\forall t \in [\frac{1}{\theta}, \frac{k}{n}], \frac{k}{n} - t \begin{cases} > 0 \text{ si } t \in [\frac{1}{\theta}, \frac{k}{n}[\\ = 0 \text{ si } t = \frac{k}{n} \end{cases}$

Comme $\forall t \in [\frac{1}{\theta}, \frac{k}{n}], \frac{2}{t^3} > 0$, on a :

$t \longmapsto (\frac{k}{n} - t)\frac{2}{t^3}$ est positive et non identiquement nulle sur $[\frac{1}{\theta}, \frac{k}{n}]$.

Donc, d'après le cours, $\int_{1/\theta}^{k/n} (\frac{k}{n} - t)\frac{2}{t^3} dt > 0$

2ème cas : $k \leqslant \lfloor \frac{n}{\theta} \rfloor$

Alors, $k \leqslant \frac{n}{\theta}$ i.e. $\frac{k}{n} \leqslant \frac{1}{\theta}$

On a donc : $\forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{1}{\theta}], (\frac{k}{n} - t) \leq 0$ i.e. $(\frac{k}{n} - t)\frac{2}{t^3} \leq 0$

Comme $\left[\begin{array}{l} \cdot \text{ les fonctions en présence sont continues sur } [\frac{k}{n}, \frac{1}{\theta}], \\ \cdot\ \frac{1}{\theta} \geq \frac{k}{n} \end{array}\right.$

par croissance de l'intégration, $\int_{k/n}^{1/\theta} (\frac{k}{n} - t)\frac{2}{t^3}\,dt \leq 0$

i.e. $\int_{1/\theta}^{k/n} (\frac{k}{n} - t)\frac{2}{t^3}\,dt \geq 0$

On a donc au final :

$$\forall k \geq n, \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right)\frac{2}{t^3}\,dt \left[\begin{array}{ll} \geq 0 & \text{si } k \geq \lfloor \frac{n}{\theta} \rfloor + 1 \\ \geq 0 & \text{si } k \leq \lfloor \frac{n}{\theta} \rfloor \end{array}\right. \quad (2)$$

• soit $k \in [\![n, +\infty[\![$

$\forall i \in [\![1, n]\!], X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $k - n + 1 \geq 1$

On remarque que : $[X_1 = k-n+1] \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n} [X_i = 1]\right) \subset \left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]$

Par croissance de P^θ, on a :

$$P^\theta\left([X_1 = k-n+1] \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n} [X_i = 1]\right)\right) \leq P^\theta\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right)$$

Comme $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, on a :

$$P^\theta\left([X_1 = k-n+1] \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n} [X_i = 1]\right)\right) = P^\theta([X_1 = k-n+1]) \prod_{i=2}^{n} P([X_i = 1])$$

Comme $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall s \in \mathbb{N}^*, P([X_i = s]) = (1-\theta)^{s-1}\theta > 0$, on a :

$$P^{\theta}\left([X_1 = k-n+1] \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n} [X_i = 1]\right)\right) > 0.$$

Par transitivité, on a : $P^{\theta}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) > 0$

Ainsi, $\forall k \geq n,\ P^{\theta}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) > 0$ (3)

- D'après (2) et (3), on a :

$$\forall k \geq n,\ P^{\theta}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right) \frac{2}{t^3}\, dt \begin{cases} > 0 & \text{si } k \geq \lfloor \frac{n}{\theta} \rfloor + 1 \\ \geq 0 & \text{si } k \leq \lfloor \frac{n}{\theta} \rfloor \end{cases}$$

De plus, d'après (1), $\exists k_0 \in [\![n, +\infty [\![\mid k_0 \geq \lfloor \frac{n}{\theta} \rfloor + 1$

Ainsi, $\sum_{k=n}^{+\infty} P^{\theta}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right]\right) \int_{1/\theta}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - t\right) \frac{2}{t^3}\, dt > 0$

On peut conclure :

$$\boxed{\forall \theta \in \Theta =]0,1[,\ b_{\theta}(T) > 0}$$

7. **Rappel** : Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même espérance et même variance.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$(\bar{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à m.

- On a
  - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \varphi_4(X_1, \dots, X_n)$ où φ_4 est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ indépendante du paramètre θ à estimer
  - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \varphi_5(X_1, \dots, X_n)$ où φ_5 est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ indépendante du paramètre θ à estimer
  - $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi

Ainsi, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites d'estimateurs du paramètre θ.

- D'après le théorème du transfert, on a :

$\frac{1}{X}$ admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} P^\theta([X=k])$ converge absolument i.e. si et seulement si $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} P^\theta([X=k])$ converge car $\frac{1}{k^2} P^\theta([X=k]) \geq 0$ pour tout $k \geq 1$.

On a : $\forall k \geq 1$, $\frac{1}{k^2} P^\theta([X=k]) = \frac{\theta(1-\theta)^{k-1}}{k^2} = \frac{\theta}{(1-\theta)} \times \frac{(1-\theta)^k}{k^2}$

Alors
- $\forall k \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{k^2} P^\theta([X=k]) \leq \frac{\theta}{1-\theta} \times (1-\theta)^k$ car $\frac{1}{k^2} \leq 1$
- $\sum_{k\geq 0} (1-\theta)^k$ converge (série géométrique convergente avec $(1-\theta) \in]0,1[$)

Par critère de comparaison, $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} P^\theta([X=k])$ converge.

Ainsi, $\frac{1}{X}$ admet un moment d'ordre 2 donc une variance.

Comme pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i suit la même loi que X, on a :

$\left(\frac{1}{X_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires ayant même variance.

• $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

D'après le lemme des coalitions, $\left(\frac{1}{X_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On sait également d'après 4.a) que $\left(\frac{1}{X_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires ayant une même espérance $\frac{\theta\ln(\theta)}{\theta-1}$. Comme elles ont aussi même variance, d'après la loi faible des grands nombres, on a :

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\frac{\theta\ln(\theta)}{\theta-1}$.

• $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes ayant même espérance $\frac{1}{\theta}$ et même variance $\frac{1-\theta}{\theta^2}$.

D'après la loi faible des grands nombres, $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\frac{1}{\theta}$.

• soit $\varepsilon > 0$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Comme $\theta \in]0,1[$,

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue en $\frac{1}{\theta} \in]0,+\infty[$

Par définition de la limite, $\exists \alpha > 0 \mid \forall x \neq 0, |x - \frac{1}{\theta}| \leq \alpha \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \theta \right| \leq \varepsilon$

soit $\omega \in \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{\theta} \right| \leq \alpha \right]$

Alors, $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{\theta} \right| \leq \alpha$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \neq 0$.

Ainsi, $$\left| \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)} - \theta \right| \leq \varepsilon$$

i.e. $\left| \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)} - \theta \right| \leq \varepsilon$ i.e. $|U_n(\omega) - \theta| \leq \varepsilon$

i.e. $\omega \in [|U_n - \theta| \leq \varepsilon]$

Ainsi, $\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{\theta} \right| \leq \alpha \right] \subset [|U_n - \theta| \leq \varepsilon]$

Par croissance de P^θ et, comme $P^\theta \in [0,1]$:

$$P^\theta\left(\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{\theta} \right| \leq \alpha \right]\right) \leq P^\theta([|U_n - \theta| \leq \varepsilon]) \leq 1 \quad (1)$$

- On a l'inclusion d'événements :

$$\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{\theta} \right| < \frac{\alpha}{2} \right] \subset \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{\theta} \right| \leq \alpha \right]$$

Par croissance de P^θ et, comme $P^\theta \in [0,1]$:

$$P^\theta\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{\theta}\right| < \frac{\alpha}{2}\right]\right) \leq P^\theta\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{\theta}\right| \leq \alpha\right]\right) \leq 1$$

Comme $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\frac{1}{\theta}$ et $\alpha/2 > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P^\theta\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{\theta}\right| < \frac{\alpha}{2}\right]\right) = 1$$

Par théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} P^\theta\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{\theta}\right| \leq \alpha\right]\right) = 1.$

- D'après (1), par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} P^\theta([|U_n - \theta| \leq \varepsilon]) = 1 \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \quad (2)$$

- soit $\varepsilon > 0$

on a $\left[|U_n - \theta| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset [|U_n - \theta| < \varepsilon]$

Par croissance de P^θ et, comme $P^\theta \in [0,1]$:

$$P^\theta\left(\left[|U_n - \theta| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq P^\theta([|U_n - \theta| < \varepsilon]) \leq 1$$

D'après (2), on a $\lim_{n\to+\infty} P^\theta\left(\left[|U_n - \theta| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) = 1$ car $\varepsilon/2 > 0$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim_{n\to+\infty} P^\theta([|U_n - \theta| < \varepsilon]) = 1$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} P^{\theta}\left(\left[|U_n - \theta| \geq \varepsilon\right]\right) = 0.$

Ainsi, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.

On conclut :

> → $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite d'estimateurs convergente du paramètre θ
>
> → $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs convergente du paramètre θ

<u>Remarque</u> : En toute rigueur on ne pouvait pas utiliser le théorème suivant du cours : si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$. En effet, $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ n'est pas continue en 0. C'est pourquoi nous avons fait une démonstration complète...