Polynômes

Extrait du polycopié (20 premières pages)

Factorisation de polynômes

Exercice 1. *(Échauffement)*

Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$ lorsque cela a un sens :

1. $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $X^8 - 1$ et $X^7 - 1$.
3. $(X^2 - 2X + 1)^2 + 1$.

Exercice 2. *(Des factorisations délicates)*

1. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^n - 1$.
   On pourra distinguer les cas suivant la parité de n.
2. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$:
   $$X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$$
   où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{Z}, \theta \not\equiv \frac{2k\pi}{n}[\pi]$.
3. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$:
   $$(X+i)^n - (X-i)^n$$

Exercice 3. *(Calcul pratique de sommes)*

1. Montrer que :
   $$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{n}{2n}$$
   On pourra utiliser le polynôme $(1-X^2)^{2n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, montrer que :
   $$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$$
   On pourra utiliser le polynôme $(1 + X + X)^n$.

Équations d'inconnue polynômiale

Exercice 4.

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ les équations :

$$P(X^2) = \left(X^2 + 1\right) P(X)$$

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$, l'équation :

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

Classique 1. *(Noyau de l'opérateur de différenciation)*

Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$, l'équation :

$$P(X+1) = P(X)$$

Classique 2.

Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$, l'équation :

$$P(X) + (1-X)P'(X) = 0$$

Polynôme dérivé

Classique 3.

Montrer que le polynôme dérivé d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}[X]$ est lui aussi scindé sur $\mathbb{R}[X]$. *On pourra d'abord le montrer pour les polynômes scindés à racines simples et appliquer à bon escient le théorème de Rolle.*

Classique 4.

Déterminer les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

Classique 5. *(Théorème de Gauss-Lucas)*

Montrer que les racines du polynôme dérivé sont situées dans l'enveloppe convexe formée par les racines de ce même polynôme.
Soit A une partie de E, on définit l'enveloppe convexe de A notée $\text{Conv}(A)$:

$$\text{Conv}(A) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \middle\backslash n \in \mathbb{N}, (\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in (\mathbb{R}^+)^n, (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in A^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

On pourra utiliser la quantité P'/P.

Suite de polynômes

Classique 6. *(Bolzano-Weierstrass polynômial)*

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et notons :

$$M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$$

1. Montrer que :
$$\forall k \in [\![0,n]\!], |a_k| \leq M$$
On pourra utiliser les racines $d+1$-ième de l'unité et s'intéresser à $P(\omega^\ell)$ pour $\ell \in [\![0,d]\!]$ et $\omega = e^{\frac{2i\ell\pi}{d+1}}$.
2. Montrer que de toute suite uniformément bornée sur le cercle unité de $\mathbb{C}$ de polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$, on peut en extraire une suite convergente. *Il faut connaître le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$. On dira que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_d[X]^{\mathbb{N}} \longrightarrow_{n\to\infty} Q$ si $\forall k \in [\![0,d]\!], a_{k,n} \longrightarrow_{n\to\infty} a_k$ où $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \sum_{k=0}^{d} a_{k,n} X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.*

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 6. *(Division euclidienne)*

Effectuer la division euclidienne de :
- $X^7 - 1$ par $X^2 + 1$.
- $X^3 + X^2 + X + 1$ par $X - 1$.
- $X^n - 1$ par $X - 1$.
- $X^{16} + X^4 + X^2 + X$ par $X^2 - 1$.

Exercice 7. *(Autour de la formule de Taylor)*

1. Énoncer et démontrer la formule de Taylor polynômiale.
2. Application : Donner le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $(X - a)^n$.

Classique 7. *(Idéal de $\mathbb{K}[X]$)*

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, $z \in \mathbb{C}$ et $I_z = \{P \in \mathbb{K}[X], P(z) = 0\}$. On suppose que $I_z \backslash \{0\}$ est non vide.
1. Montrer que si $(A, B) \in I_z^2$ alors $A + B$ et pour $C \in \mathbb{K}[X]$, AC le sont également. *On dit que I_z est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.*
2. Montrer qu'il existe un polynôme non nul et de degré minimal dans I_z. Un tel polynôme est noté M_z.
3. Montrer que :

$$I_z = \{AM_z, A \in \mathbb{K}[X]\}$$

On utilisera le théorème de division euclidienne.
4. Déterminer $I_{\sqrt{2}}$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puis $\mathbb{Q}$.

Familles de polynômes classiques

Classique 8. *(Polynômes de Lagrange)*

Soit $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ deux à deux distincts et notons :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], L_j = \frac{\prod_{i=0, i \neq j}^{n} X - a_i}{\prod_{i=0, i \neq j}^{n} a_j - a_i}$$

1. Calculer $\forall (i, j) \in [\![0, n]\!]^2, L_j(a_i)$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, il existe une unique famille $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ telle que :

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$$

La déterminer en fonction de P et de $(a_0, ..., a_n)$.
3. Question d'ouverture : Proposer une routine, en langage naturel ou en python, pour calculer l'intégrale de P sur $[-1, 1]$ en ne connaissant que les valeurs de P sur les points de Lagrange $(a_0, ..., a_n) \in [-1, 1]^{n+1}$. Pour une fonction continue, discuter la convergence d'une telle formule de quadrature.

Classique 9. *(Polynômes de Legendre)*

1. Montrer que pour toute fonction continue de $[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$$

2. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!}\left(\left(X^2-1\right)^n\right)^{(n)}$$

Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n.

3. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}$,

$$\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\mathrm{d}t = 0$$

4. En déduire que L_n possède n racines distinctes toutes comprises dans $]-1,1[$.

Extraits de sujets de concours

Classique 10. *(Les polynômes de Tchebychev) Centrale-Supélec - MP 2014 - II (adapté)*

Les polynômes de Tchebychev de première espèce $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

On ne demande pas de justifier l'existence et l'unicité de la famille de polynômes définie par cette relation.

1. Déterminons T_0, T_1, T_2 et T_3.

2. En remarquant que pour tout réel θ, on a $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{0\leq k\leq n/2} \binom{n}{2k}(X^2-1)^k X^{n-2k}$$

Écrire en langage naturel, une fonction T prenant en argument un entier naturel n et renvoyant l'expression développée du polynôme T_n.

3. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

En déduire, pour tout entier naturel n, le degré et le coefficient dominant de T_n. Retrouver ce résultat à l'aide de la question **2.**.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n, le polynôme T_n est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples appartenant à $]-1,1[$. Déterminer les racines de T_n.

On définit les polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Tchebychev de deuxième espèce par

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}$$

5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}, U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

6. En déduire les propriétés suivantes :

1. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, le polynôme U_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples appartenant à $]-1,1[$. Déterminer les racines de U_n.

7. Montrer que

$$\begin{cases} T_m \cdot T_n = \dfrac{1}{2}\left(T_{n+m} + T_{n-m}\right), \text{ pour tous entiers } 0 \leq m < n \\ T_m \cdot U_{n-1} = \dfrac{1}{2}\left(U_{n+m-1} + U_{n-m-1}\right), \text{ pour tous entiers } 0 \leq m < n \end{cases}$$

8. Pour m et n entiers naturels

Classique 11. *(Les polynômes de Bernoulli) ENS 84 - MP (adapté)*

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit l'opérateur :

$$\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X) - P(X-1) \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
On admet dans la suite que Δ est surjective de $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Montrer qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}^\star$,

$$Q(p) = \sum_{k=1}^{p-1} k^n$$

Montrer que $Q_n(0) = Q_n(1) = 0$.
3. Montrer qu'il existe $(a_n)_{n\geq 2}$, suite de nombres rationnels, telle que :

$$Q_n' + a_n = nQ_{n-1}$$

On pourra calculer $\Delta(Q_n' - nQ_{n-1})$.
4. On note $\overline{Q_n}(X) = Q_n(1-X)$. Comparer $\overline{Q_n}$ et Q_n.
5. Calculer Q_1 et Q_2.
6. Calculer $Q_{2p}\left(\frac{1}{2}\right)$ et a_{2p+1}.
7. Établir que les polynômes Q_{2p} ne s'annulent sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ qu'au point $\frac{1}{2}$ et que les polynômes Q_{2p+1} sont de signe constant sur ce même intervalle. *On pourra calculer Q_1, Q_2 et dresser par récurrence les tableaux de variations de Q_{2p+1} et Q_{2p+2}.*

Classique 12. *(Équations algébriques réciproques) Mines-Ponts MP 2012 I (adapté)*

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, l'application $u_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ donnée par la formule $u_n(P)(X) = X^n P\left(\frac{1}{X^n}\right)$ est bien définie, et que c'est une symétrie. *Une application f est une symétrie si $f \circ f = id$.*

Un polynôme R de $\mathbb{R}[X]$ est dit *réciproque de première espèce* s'il est non nul et invariant par $u_{\deg(R)}$; il est dit *réciproque de deuxième espèce* s'il est non nul et transformé en son opposé par $u_{\deg(R)}$. On note $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{P}$) , l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ réciproques de première (respectivement de deuxième) espèce.

2. Donner une condition nécessaire sur ses coefficients pour qu'un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ appartienne à $\mathcal{P}$ (respectivement à $\mathcal{D}$).

3. Établir que si R est réciproque (c'est-à-dire $\mathbb{R} \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$) et x une racine de R, alors x est non nul et $\frac{1}{x}$ est aussi une racine de R. Montrer par ailleurs que tout polynôme de $\mathcal{D}$ admet 1 pour racine, et que pour tout polynôme de $\mathcal{P}$ de degré impair admet -1 pour racine.
4. Étant donné trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = QR$, montrer que si deux d'entre eux sont réciproques, alors le troisième l'est aussi. Établir un lien entre les espèces de ces trois polynômes réciproques.
5. Vérifier que $P \in \mathcal{P}$ implique $(X-1)P \in \mathcal{D}$. Réciproquement, montrer que si $D \in \mathcal{D}$, il existe un unique $P \in \mathcal{P}$ tel que $D = (X-1)P$.
6. Établir un résultat analogue caractérisant les polynômes de $\mathcal{P}$ de degré impair dans $\mathbb{R}[X]$.
7. Montrer que si $p \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^p + \frac{1}{X^p} = P\left(X + \frac{1}{X}\right)$$

Quel est le degré de P ?

Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$ réciproque n'admettant ni 1 ni -1 comme racine.

8. Montrer que R est réciproque de première espèce et de degré pair. En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on ait l'équivalence $R(x) = 0 \Longleftrightarrow P\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$. Y a-t-il unicité du polynôme P ? de deg(P) ?

Factorisation de polynômes

Exercice Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$ lorsque cela a un sens :

1. $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $X^8 - 1$ et $X^7 - 1$.
3. $(X^2 - 2X + 1)^2 + 1$.

■ **Correction**

1. Remarquons que $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = X^2 - \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) X + e^{i\theta}e^{-i\theta} = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)$.

$$\boxed{X^2 - 2\cos\theta X + 1 = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)}$$

Un tel polynôme admet donc une factorisation sur $\mathbb{R}[X] \iff e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont réels $\iff \sin\theta = 0$ et $\sin(-\theta) = 0 \iff \sin\theta = 0 \iff \theta \equiv 0[\pi] \iff \theta \equiv 0$ ou $\pi[2\pi]$. Ainsi,

$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } \theta \equiv 0[2\pi], X^2 - 2\cos\theta X + 1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 \\ \text{Si } \theta \equiv \pi[2\pi], X^2 - 2\cos\theta X + 1 = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2 \end{cases}}$$

Rappel de cours 1 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.**

Tout polynôme de degré supérieur à 1 est scindé sur $\mathbb{C}[X]$.
Les polynômes que vous serez amenés à factoriser admettront une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas forcément dans $\mathbb{R}[X]$. Pour vous convaincre, considérez le polynôme $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$.

Rappel de cours 2 (Relation somme et produit des racines)**.**

Soit z_1 et z_2 les deux racines complexes de $X^2 - sX + p$. Ces deux réels vérifient :

$$\begin{cases} s = z_1 + z_2 \\ p = z_1 z_2 \end{cases}$$

2. $X^8 - 1$ admet pour racines $\left(e^{\frac{2ik\pi}{8}}\right)_{k \in [\![0,7]\!]}$ qui sont au nombre de $8 = \deg(X^8 - 1)$ et distinctes, elles sont donc simples et nous obtenons la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$X^8 - 1 = \prod_{k=0}^{7}\left(X - e^{2i\frac{k\pi}{8}}\right)$$

Pour obtenir une factorisation sur $\mathbb{R}[X]$, on sépare les racines réelles et les racines appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ puis on rassemble les paires de conjugués des racines appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$:

$$X^8 - 1 = \underbrace{\left(X - e^{2i\frac{0\pi}{8}}\right)}_{=X-1}\underbrace{\left(X - e^{2i\frac{1\pi}{8}}\right)\left(X - e^{2i\frac{7\pi}{8}}\right)}_{X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)X+1}\underbrace{\left(X - e^{2i\frac{2\pi}{8}}\right)\left(X - e^{2i\frac{6\pi}{8}}\right)}_{X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right)X+1}$$
$$\underbrace{\left(X - e^{2i\frac{3\pi}{8}}\right)\left(X - e^{2i\frac{5\pi}{8}}\right)}_{X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)X+1}\underbrace{\left(X - e^{2i\frac{4\pi}{8}}\right)}_{=X+1}$$

$$\boxed{X^8-1=(X-1)(X+1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)X+1\right)}$$

X^7-1 admet pour racines $\left(e^{\frac{2ik\pi}{7}}\right)_{k\in[\![0,6]\!]}$ qui sont au nombre de $7=\deg(X^7-1)$ et distinctes, elles sont donc simples et nous obtenons la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$X^7-1=\prod_{k=0}^{6}\left(X-e^{2i\frac{k\pi}{7}}\right)$$

Pour obtenir une factorisation sur $\mathbb{R}[X]$, on sépare les racines réelles et les racines appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ puis on rassemble les paires de conjugués des racines appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$:

$$X^7-1=(X-1)\underbrace{\left(X-e^{2i\frac{1\pi}{7}}\right)\left(X-e^{2i\frac{6\pi}{7}}\right)}_{X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)X+1}\underbrace{\left(X-e^{2i\frac{2\pi}{7}}\right)\left(X-e^{2i\frac{5\pi}{7}}\right)}_{X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)X+1}$$
$$\underbrace{\left(X-e^{2i\frac{3\pi}{8}}\right)\left(X-e^{2i\frac{4\pi}{7}}\right)}_{X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)X+1}$$

$$\boxed{X^7-1=(X-1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)X+1\right)}$$

Point méthodologique 1.

Pour obtenir la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$ d'un polynôme réel dont on connait une factorisation sur $\mathbb{C}[X]$, il suffit de séparer les racines réelles et les racines appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ puis on rassemble les paires de conjugués des racines appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$:

$$(X-z)(X-\overline{z})=X^2-2\mathrm{Re}(z)X+|z|^2$$

en se souvenant que :

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}\text{ et }|z|^2=z\overline{z}$$

3. Nous reconnaissons une identité remarquable :

$$(X^2-2X+1)^2+1=((X-1)^2+i)((X-1)^2-i)$$

Ayant $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ et en reconnaissant deux autres identités remarquables :

$$((X-1)^2+i)((X-1)^2-i)=\left(X-1-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-1+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

Nous en déduisons la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{(X^2-2X+1)^2+1=\left(X-\left(1+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)\left(X-\left(1-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)\left(X-\left(1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right)\left(X-\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right)}$$

Pour obtenir la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$, nous regroupons les paires de conjugués en reconnaissant :

$$\overline{1-e^{-i\frac{\pi}{4}}}=1-e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\overline{1+e^{-i\frac{\pi}{4}}}=1+e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Nous avons :

$$\mathrm{Re}\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\mathrm{Re}\left(1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\left|1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right|^2 = \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$\left|1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right|^2 = \left(1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

La factorisation sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\boxed{(X^2-2X+1)^2+1 = \left(X^2 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)X + 2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\left(X^2 - 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)X + 2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)}$$

■

Exercice

1. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^n - 1$.
   On pourra distinguer les cas suivant la parité de n.
2. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$:
$$X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$$
   où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{Z}, \theta \not\equiv \frac{2k\pi}{n}[\pi]$.
3. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$:
$$(X+i)^n - (X-i)^n$$

■

■ **Correction**

1. $X^n - 1$ admet pour racines $\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ qui sont au nombre de $n = \deg(X^n-1)$ et distinctes, elles sont donc simples et nous obtenons la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$$

   Pour obtenir la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$, nous allons distinguer le cas où n est pair et le cas où il est impair.

   (a) *Cas n pair :* Notons alors $n = 2p$. Les racines réelles de $X^n - 1$ sont $1 = e^{\frac{2ik\pi}{2p}}$ pour $k = 0$ et $-1 = e^{\frac{2ik\pi}{2p}}$ pour $k = p$. Nous en déduisons alors que :

$$\begin{aligned}
X^n - 1 = X^{2p} - 1 &= \prod_{k=0}^{2p-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{2p}}\right)\\
&= (X-1)(X+1)\prod_{k=1,k\neq p}^{2p-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{p}}\right)\\
&= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{p}}\right)\prod_{k'=p+1}^{2p-1}\left(X - e^{\frac{ik'\pi}{p}}\right)\\
\ell = k' - p \rightarrow &= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{p}}\right)\prod_{\ell=1}^{p-1}\left(X - e^{\frac{i(\ell+p)\pi}{p}}\right)\\
\ell' = p - \ell \rightarrow &= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{p}}\right)\prod_{\ell'=1}^{p-1}\left(X - e^{\frac{i(-\ell'+2p)\pi}{p}}\right)\\
&= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{p}}\right)\prod_{\ell'=1}^{p-1}\left(X - e^{-\frac{i\ell'\pi}{p}}\right)
\end{aligned}$$

On en conclut ainsi,

$$\boxed{X^n - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right)+1\right)}$$

Astuce Cette manière de compter les racines est assez difficile à comprendre lorsqu'on découvre pour la première fois cette démonstration. Voici le schéma qui a motivé nos changement d'indices successifs :

$$k \text{ parcourt } \{\underbrace{0}_{1}, 1, \dots, p-1, \underbrace{p}_{-1}, p+1, \dots, 2p-1\}$$

$$e^{\frac{ik\pi}{p}} \notin \mathbb{R} \text{ lorsque } k \text{ parcourt } \{1, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1\}$$

$$\text{Les pairs de conjugués sont } e^{\frac{ik\pi}{p}} \text{ et } e^{\frac{i(2p-k)\pi}{p}}$$

$$\text{Découpage de la liste en deux sous-listes } [\![1, p-1]\!] : (\ell = k' - p)$$

$$\text{et retournement de la deuxième pour aligner les paires de conjugés : } (\ell' = p - \ell)$$

(b) *Cas n impair :* Notons alors $n = 2p+1$. La seule racine réelle de $X^n - 1$ est $1 = e^{\frac{2ik\pi}{2p+1}}$ pour $k = 0$. Nous en déduisons alors que :

$$\begin{aligned}
X^n - 1 = X^{2p} + 1 &= \prod_{k=0}^{2p}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{2p+1}}\right) \\
&= (X-1)\prod_{k=1}^{2p}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{2p+1}}\right) \\
&= (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{2p+1}}\right)\prod_{k'=p+1}^{2p}\left(X - e^{\frac{2ik'\pi}{2p+1}}\right) \\
\ell = k' - p \rightarrow &= (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{p}}\right)\prod_{\ell=1}^{p}\left(X - e^{\frac{2i(\ell+p)\pi}{2p+1}}\right) \\
\ell' = p - \ell \rightarrow &= (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{2p+1}}\right)\prod_{\ell'=1}^{p}\left(X - e^{\frac{2i(-\ell'+2p)\pi}{2p+1}}\right) \\
&= (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{2p+1}}\right)\prod_{\ell'=1}^{p}\left(X - e^{-\frac{2i\ell'\pi}{2p+1}}\right)
\end{aligned}$$

On en conclut ainsi,

$$\boxed{X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2p+1}\right)X+1\right)}$$

2. Nous reconnaissons une factorisation immédiate,

$$X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1 = \left(X^n - e^{in\theta}\right)\left(X^n - e^{-in\theta}\right)$$

Tout d'abord,

$$z^n = e^{in\theta} \Leftrightarrow z = e^{i\theta + \frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}$$

Et il suffit que $k \in [\![0, n-1]\!]$ pour que l'on ait parcouru l'ensemble des racines de cette équation. Ensuite,

$$z^n = e^{-in\theta} \Leftrightarrow z = e^{-i\theta + \frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}$$

Et il suffit que $k \in [\![0, n-1]\!]$ pour que l'on ait parcouru l'ensemble des racines de cette équation. Nous en déduisons la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\theta + \frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X - e^{-i\theta + \frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

$X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$ admet des racines réelles s'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que :

$$\theta + \frac{2k\pi}{n} \equiv 0[\pi] \text{ ou } -\theta + \frac{2k\pi}{n} \equiv 0[\pi] \iff \theta \equiv -\frac{2k\pi}{n}[\pi] \text{ ou } -\theta \equiv -\frac{2k\pi}{n}[\pi]$$

L'énoncé indique $\forall k \in \mathbb{Z}, \theta \not\equiv \frac{2k\pi}{n}[\pi]$, le polynôme n'admet donc aucune racine réelle. Regroupons les paires de conjugués :

$$\begin{aligned} X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1 &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\theta + \frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X - e^{-i\theta + \frac{2ik\pi}{n}}\right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\theta + \frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{k'=0}^{n-1}\left(X - e^{-i\theta + \frac{2ik'\pi}{n}}\right) \\ \ell = n-1-k' \rightarrow &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\theta + \frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{\ell=0}^{n-1}\left(X - e^{-i\theta - \frac{2i\ell\pi}{n}}\right) \end{aligned}$$

On obtient ainsi la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$

$$\boxed{X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)}$$

3. Résolvons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}, (z+i)^n - (z-i)^n = 0$. Nous avons la succession d'équivalences :

$$(z+i)^n - (z-i)^n = 0 \iff (z+i)^n = (z-i)^n \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$$

En effet :
— $\Longleftarrow$ en multipliant par $(z-i)^n$,
— $\Longrightarrow$ en divisant par $(z-i)^n \neq 0$ car $z = i$ n'est pas solution de l'équation.
On en déduit,

$$\begin{aligned} (z+i)^n - (z-i)^n = 0 &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], z + i = (z-i)e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], ze^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = -ie^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], -z2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = -i2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], z\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

On remarque dans la dernière équation que k ne peut être égal à 0, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} (z+i)^n - (z-i)^n = 0 &\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!], z\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ &\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!], z = \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Nous avons donc extrait $n-1$ racines distinctes. Une rapide application de la formule du binôme de Newton, nous assure que $(X+1)^n-(X-i)^n$ est de degré $n-1$ (en effet, les termes de degré n s'annulent). Les racines sont donc simples et nous obtenons la factorisation suivante :

$$\boxed{(X+i)^n-(X-i)^n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}$$

■

Exercice

1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$$

On pourra utiliser le polynôme $(1-X^2)^{2n}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[\![0,n]\!]$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=2^p\binom{n}{p}$$

On pourra utiliser le polynôme $(1+X+X)^n$.

■

■ **Correction**

Astuce La théorie des polynômes est souvent très employée pour calculer des sommes particulières. L'idée est assez intuitive : trouver un polynôme intéressant et exprimer ses coefficients de plusieurs manières. L'écriture $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ étant unique, on en déduit l'égalité des deux expressions ! ■

1. Écrivons de deux manières différentes $(1-X^2)^{2n}$:
   (a) Par le binôme de Newton :

$$\left(1-X^2\right)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{2n-k}X^{2k}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^kX^{2k}$$

   En effet, $(-1)^{2n-k}=(-1)^k$.

   (b) En factorisant puis en appliquant le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\left(1-X^2\right)^{2n}=(1-X)^{2n}(1+X)^{2n}&=\left(\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{2n-k}X^k\right)\left(\sum_{p=0}^{2n}\binom{2n}{p}X^p\right)\\&=\left(\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^kX^k\right)\left(\sum_{p=0}^{2n}\binom{2n}{p}X^p\right)\\&=\sum_{k=0}^{2n}\sum_{p=0}^{2n}\binom{2n}{k}\binom{2n}{p}(-1)^kX^{k+p}\end{aligned}$$

Dans l'expression (a), le coefficient devant X^{2n} est donné par $(-1)^n\binom{2n}{n}$. Pour obtenir le coefficient devant X^{2n} dans l'expression (b), il faut s'intéresser aux termes de la somme portant sur le couple $(k,p)\in[\![0,2n]\!]^2$ vérifiant la relation $k+p=2n\iff p=2n-k$:

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\underbrace{\binom{2n}{2n-k}}_{\binom{2n}{k}}(-1)^k=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2$$

Par unicité des coefficients :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}}$$

2. Écrivons de deux manières différentes $(1+X+X)^n$:
   (a) Par le binôme de Newton :

$$(1+X+X)^n=(1+2X)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^kX^k$$

   En effet, $(-1)^{2n-k}=(-1)^k$.

   (b) Par le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(1+X+X)^n=((1+X)+X)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+X)^{n-k}X^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}X^\ell X^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}X^{k+\ell}\end{aligned}$$

   Dans l'expression (a), le coefficient devant X^p est donné par $2^p\binom{n}{p}$. Pour obtenir le coefficient devant X^p dans l'expression (b), il faut s'intéresser aux termes de la somme portant sur le couple $(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2$ vérifiant la relation $k+\ell=p\iff\ell=p-k\iff\ell=p-k,k\in[\![0,p]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

   Par unicité des coefficients :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=2^p\binom{n}{p}}$$

■

Équations d'inconnue polynômiale

Exercice Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ les équations :

$$P(X^2)=\left(X^2+1\right)P(X)$$

■

■ **Correction** Nous allons résoudre cette équation par conditions nécessaires puis par conditions suffisantes, ce qui revient à faire une analyse-synthèse.
Analyse : Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ une solution de l'équation et notons n son degré. Remarquons que $\deg P(X^2)=2n$ et $\deg(X^2+1)P=n+2$. n est donc solution de l'équation suivante $2n=n+2$ soit $n=2$. Il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $P=aX^2+bX+c$. Injections l'expression obtenue dans l'équation :

$$\begin{cases}P(X^2)=aX^4+bX^2+c\\(X^2+1)P=(X^2+1)(aX^2+bX+c)=aX^4+bX^3+(c+a)X+c\end{cases}$$

L'égalité de deux polynômes impliquant l'égalité de leurs coefficients, il vient :

$$\begin{cases}b=0\\c+a=b\end{cases}$$

Donc, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a\left(X^2 - 1\right)$.
Synthèse : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P = a\left(X^2-1\right)$. Nous avons bien :

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X)$$

Conclusion :

$$\boxed{P(X^2) = \left(X^2+1\right)P(X) \Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{C}, P = a\left(X^2-1\right)}$$

■

Exercice Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$, l'équation :

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

■

■ **Correction** Comme précédemment nous allons raisonner par analyse-synthèse.
Analyse : Soit $P \in \mathbb{C}[X] \backslash \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$ une solution de l'équation.

■ **Remarque** *A priori*, rien ne nous permet de réduire notre recherche en argumentant sur le degré. Je vous laisse remarquer que l'équation ne conditionne pas immédiatement le degré... Nous allons donc nous intéresser aux racines de P. ■

Nous remarquons l'implication suivante :

$$\alpha \text{ est une racine de } P \Longrightarrow \alpha^2 \text{ et } (\alpha-1)^2 \text{ sont racines de } P$$

Soit α une racine de P, nous en déduisons que l'ensemble $(\alpha^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est formé de racines de P. Or les racines de P sont en nombre fini et l'ensemble $(\alpha^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est redondant. Il existe donc p et q (sans perdre de généralités, nous considérons $p<q$) tels que :

$$\alpha^{2^p} = \alpha^{2^q} \Longleftrightarrow \alpha^{2^p}\left(1-\alpha^{2^q-2^p}\right) = 0$$

α est donc nulle ou une racine de l'unité. De même, ayant $(\alpha-1)^2$ est une racine de P, $\alpha - 1$ est soit nulle soit une racine de l'unité. Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, notons $\alpha = e^{i\theta}$ et $\alpha - 1 = e^{i\theta'}$. Il vient donc :

$$\alpha = 1 + e^{i\theta'} = e^{-i\frac{\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta'}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)e^{-i\frac{\theta'}{2}}$$

α étant une racine de l'unité, nous remarquons que $2\left|\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\right| = 1$, ce qui impose :

$$\frac{\theta'}{2} \equiv \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[\pi] \Longleftrightarrow \theta' \equiv \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[2\pi]$$

Finalement $\alpha = 1 + j = -j^2$ ou $1 + j^2 = -j$.

Point méthodologique 2 (Le complexe j).

Par définition $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et vérifie la relation suivante :

$$1 + j + j^2 = 0$$

Conclusion : $\alpha = 0, 1, -j$ ou $-j^2$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$, $(n,p,q,r) \in \mathbb{N}^4$:

$$P = \lambda X^n (X-1)^p (X+j)^q (X+j^2)^r$$

En injectant dans l'équation on obtient :

$$\lambda = \lambda^2, n = p, q = r = 0$$

Ainsi, $P = (X(X-1))^n$ ou $P = 0$.
Synthèse : $P = 0$ vérifie trivialement l'équation. Pour $P = X^n(X-1)^n$,

$$P(X)P(X+1) = X^n(X-1)^n(X+1)^nX^n = X^{2n}\left((X-1)(X+1)\right)^n = X^{2n}\left(X^2-1\right)^n = P(X^2)$$

Conclusion :

$$\boxed{P(X^2) = P(X)P(X+1) \iff P = X^n(X-1)^n \text{ ou } P = 0}$$

■

Exercice Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$, l'équation :

$$P(X+1) = P(X)$$

■ **Correction**

Astuce Si un polynôme P vérifie cette équation alors nous avons $P(0) = P(1) = ... = P(n) = ...$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Ainsi, le polynôme repasse une infinité de fois par $P(0)$! Exploitons cette idée en introduisant le polynôme $Q = P - P(0)$.

Analyse : Soit P vérifiant l'équation. Posons $Q = P - P(0)$. Nous remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) = P(n) - P(0) = 0$. Le polynôme Q admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Ainsi $P = P(0)$, P est un polynôme constant.
Synthèse : Les polynômes constants vérifient bien l'équation $P(X) = P(X+1)$.
Conclusion :

$$\boxed{P(X) = P(X+1) \iff P \text{ est constant.}}$$

■

Exercice Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$, l'équation :

$$P(X) + (1-X)P'(X) = 0$$

■ **Correction** *Analyse :* Soit $P = \sum_{k=0}^n a_kX^k$ tel que $P(X) + (1-X)P'(X) = 0$. Injectons l'expression de P dans l'équation :

$$\begin{aligned}
P(X) + (1-X)P'(X) &= \sum_{k=0}^{n} a_kX^k + (1-X)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_kX^k + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(a_k + (k+1)a_{k+1}\right)X^k + a_nX^n - \sum_{k=1}^{n} ka_kX^k \\
&= \left(a_0 + (0+1)a_1\right)X^0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left((k-1)a_k + (k+1)a_{k+1}\right)X^k + (1-n)a_nX^n
\end{aligned}$$

Un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 + a_1 = 0 \\ (k-1)a_k - (k+1)a_{k+1}, \forall k \in [\![1, n-1]\!] \\ (1-n)a_n = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a_0 = -a_1 \\ a_{k+1} = \frac{k-1}{k+1}a_k, \forall k \in [\![1, n-1]\!] \\ a_n = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a_0 = -a_1 \\ a_k = 0, \forall k \in [\![1, n]\!] \end{array}\right.$$

Donc $P = a_0(X-1)$.
Synthèse : Soit $P = a_0(X-1)$. Il vérifie bien : $P(X) + (1-X)P'(X) = 0$.

Conclusion :

$$\boxed{P(X) + (1-X)P'(X) = 0 \Longleftrightarrow P = a_0(X-1)}$$

Remarque

1. Il faut être extrêmement minutieux avec les bornes des indices lorsqu'on regroupe les sommes entre elles ! C'est grâce à cette précision que nous en déduisons un système avec 3 cas à distinguer : $k = 0$ puis $k \in [\![1, n-1]\!]$ puis $k = n$.
2. Ayant $a_n = 0$ on en déduit, grâce à $a_{k+1} = \frac{k-1}{k+1} a_k$, que $a_{n-1} = 0$ et nous pouvons descendre ainsi jusqu'à $a_2 = 0$. Remarquez bien que l'équation $a_{k+1} = \frac{k-1}{k+1} a_k$ n'apporte aucune information sur a_1 pour $k = 1$ car nous obtenons $a_2 = 0 \times a_1$.

Point méthodologique 3.

Pour résoudre des équations d'inconnue polynômiale, un raisonnement par analyse-synthèse s'impose dans la plupart des cas. Pour la simple raison que nous allons dans une analyse, tirer le maximum d'information sur de les polynômes recherchés en raisonnant, dans cet ordre, sur :
- Le degré,
- Les coefficients,
- Les racines dans $\mathbb{C}$ et éventuellement celles dans $\mathbb{R}$.

Polynôme dérivé

Exercice Montrer que le polynôme dérivé d'un polynôme scindé dans $\mathbb{R}[X]$ est lui aussi scindé. *On pourra d'abord le montrer pour les polynômes scindés à racines simples et appliquer à bon escient le théorème de Rolle.*

Correction

Rappel de cours 3 (Théorème de Rolle).

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Considérons P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Notons d son degré et λ son coefficient dominant, il existe donc $x_1, x_2, ..., x_d$, d réels distincts tels que :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{d} (X - x_k)$$

Notons f la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)$$

Soit $k \in [\![1, d-1]\!]$, remarquons que $f(x_k) = f(x_{k+1}) = 0$ et que f est dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$. Il existe donc $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $f'(y_k) = 0$ par le théorème de Rolle. Nous pouvons donc construire une famille $(y_k)_{k \in [\![1, d-1]\!]}$ de $d-1$ zéros distincts de f'. f étant une fonction polynômiale sur $\mathbb{R}$ de degré d, f' est une fonction polynômiale sur $\mathbb{R}$ de degré $d-1$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mu \prod_{k=1}^{d-1} (x - y_k)$$

P' coïncide avec f' sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$P' = \mu \prod_{k=1}^{d-1} (X - y_k)$$

donc P' est bien scindé.

■ **Remarque** C'est un superbe exercice pour se rendre compte de l'importance d'une des conclusions du Théorème de Rolle : il existe $c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$ et non $[a, b]$. Sans cette hypothèse d'ouverture de l'intervalle, rien ne vous assure que les racines de P' sont bien distinctes... ■

Traitons le cas général. Notons :

$$P = \prod_{k=1}^{d'} (X - x_k)^{m_k}$$

avec : $\sum_{k=1}^{d'} m_k = d$. Par une application du Théorème de Rolle, il existe $(y_k)_{k \in [\![1,d'-1]\!]}$ avec $\forall k \in [\![1, d'-1]\!], y_k \in]x_k, x_{k+1}[$. Nous avons donc extrait $d'-1$ racines différentes des $(x_k)_{k \in [\![1,d]\!]}$. Les $(x_k)_{k \in [\![1,d]\!]}$ sont des racines de P' de multiplicité $m_k - 1$ et sont différentes des y_k. Nous pouvons donc compter les racines obtenues :

$$\underbrace{d' - 1}_{\text{Théorème de Rolle}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{d'} m_k - 1}_{\text{Les racines multiples}} = d' - 1 + d - d' = d - 1$$

Ayant $\deg P' = d - 1$, nous avons donc extrait $d - 1$ racines réelles de P'. P' est donc scindé.

Rappel de cours 4 (Multiplicité d'une racine).

α est une racine de multiplicité au moins m de P si $(X - \alpha)^m$ divise P. Si α est une racine de multiplicité m de P, alors α est une racine de multiplicité $m - 1$ de P'.

■

Exercice Déterminer les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé. ■

■ **Correction** Nous considérons ici des polynômes non nuls.
Analyse : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel qu'il existe $Q \in \mathbb{C}_n[X]$:

$$P = QP'$$

Tout d'abord la cause est perdue si $\deg(P) = 1$ car $P' = 0$. Prenons donc $d = \deg(P) \geq 2$. Un raisonnement rapide sur le degré et le coefficient dominant dans l'égalité nous permet d'affirmer que $Q = \frac{1}{n}(X - \alpha)$. Il vient donc :

$$P - \frac{1}{n}(X - \alpha)P' = 0$$

Point méthodologique 4 (Résoudre une équation différentielle du premier ordre).

La méthode que je vous propose ici n'est pas celle enseignée sur les bancs des classes préparatoires. La plupart des cours font apparaître la quantité $(\ln|f|)'$ et c'est la main tendue à tous les pièges possibles. Et si f passe par 0 ? Heureusement le théorème de Cauchy nous assure qu'une fonction non nulle solution sur un intervalle I d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients continus et résoluble sur I ne peut passer par 0 ! Je vous propose de suivre scrupuleusement cette méthode qui ne repose que sur un seul théorème : *une fonction de dérivée nulle est une fonction constante.*
Soit f une fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned}
&\forall x > \alpha, f(x) - \frac{1}{n}(x-\alpha)f'(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow &\forall x > \alpha, f'(x) - \frac{n}{x-\alpha}f(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow &\forall x > \alpha, e^{-\beta(x)}f'(x) - \beta'(x)e^{-\beta(x)}f(x) = 0 \text{ où } \beta \text{ est UNE primitive de } x \mapsto \frac{n}{x-\alpha} \\
\Longleftrightarrow &\forall x > \alpha, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\beta(x)}f(x)\right) = 0 \\
\Longleftrightarrow &\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > \alpha, e^{-\beta(x)}f(x) = \lambda \\
\Longleftrightarrow &\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > \alpha, f(x) = \lambda e^{\beta(x)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x > \alpha, \beta(x) = n\ln(x-\alpha)$ et donc $f(x) = \lambda(x-\alpha)^n$. f et P sont deux fonctions polynômiales coïncidant sur un intervalle non réduit à un singleton de $\mathbb{R}$, on peut donc conclure que :

$$P = \lambda(X-\alpha)^n \text{ avec } n \geq 2$$

Synthèse : De tels polynômes sont bien divisibles par leur polynôme dérivé. En effet, $P' = n\lambda(X-\alpha)^{n-1}$...
Conclusion : Les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé sont les polynômes de la forme $\lambda(X-\alpha)^n$ avec $n \geq 2$. ■

Exercice Montrer que les racines du polynôme dérivé sont situées dans l'enveloppe convexe formée par les racines de ce même polynôme.
Soit A une partie de E, on définit l'enveloppe convexe de A notée Conv(A) :

$$\mathrm{Conv}(A) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\Big\backslash\; n \in \mathbb{N}, (\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in (\mathbb{R}^+)^n, (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in A^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

On pourra utiliser la quantité P'/P. ■

■ **Correction** Notons $P = \lambda \prod_{k=1}^{d}(X - z_k)^{m_k}$ et $A = (z_k)_{k \in [\![1,d]\!]}$. Soit α une racine de P'. Si $P(\alpha) = 0$, on a bien $\alpha \in \mathrm{Cond}(A)$ car $A \subset \mathrm{Cond}(A)$. Considérons à présent $P(\alpha) \neq 0$. Nous allons calculer P' :

Point méthodologique 5.

Dérivée logarithmique d'un polynôme Nous obtenons pour dériver de P :

$$P' = \lambda \sum_{k=1}^{d} \prod_{k=1}^{d} m_k (X - z_k)^{m_k - 1}$$

En divisant formellement par P :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{d} \frac{m_k}{X - z_k}$$

Nous avons donc :

$$\frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} = \sum_{k=1}^{d} \frac{m_k}{\alpha - z_k} = 0$$

Multiplions par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{m_k}{|\alpha - z_k|^2} (\overline{\alpha} - \overline{z_k}) = 0$$

Passant au conjugué et réarrangeant les côtés de l'égalité :

$$\alpha \sum_{k=1}^{d} \frac{m_k}{|\alpha - z_k|^2} = \sum_{k=1}^{d} \frac{m_k}{|\alpha - z_k|^2} z_k$$

Ou encore :

$$\alpha = \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{\sum_{k=1}^{d} \frac{m_k}{|\alpha - z_k|^2}} \frac{m_k}{|\alpha - z_k|^2} z_k = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k z_k$$

où on a posé

$$\forall k \in [\![1, d]\!], \lambda_k = \frac{1}{\sum_{k=1}^{d} \frac{m_k}{|\alpha - z_k|^2}} \frac{m_k}{|\alpha - z_k|^2}$$

qui sont positifs et de somme égale à 1, ce qui conclut.

■

Suites de polynômes

Exercice Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et notons :

$$M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$$

1. Montrer que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], |a_k| \leq M$$

On pourra utiliser les racines $d+1$-ième de l'unité et s'intéresser à $P(\omega^\ell)$ pour $\ell \in [\![0, d]\!]$ et $\omega = e^{\frac{2i\ell\pi}{d+1}}$.

2. Montrer que de toute suite uniformément bornée sur le cercle unité de $\mathbb{C}$ de polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$, on peut en extraire une suite convergente. *Il faut connaître le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$. On dira que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_d[X]^{\mathbb{N}} \longrightarrow_{n\to\infty} Q$ si $\forall k \in [\![0, d]\!], a_{k,n} \longrightarrow_{n\to\infty} a_k$ où $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \sum_{k=0}^{d} a_{k,n} X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.*

■

■ **Correction**

■ **Remarque** Il convient de dire pourquoi M est bien définie. Pour les 3/2 et 5/2, $\{|z|=1, z\in\mathbb{C}\}$ est clairement une partie bornée de $\mathbb{C}$. Elle est de plus fermée en tant qu'image réciproque de 1 par $|\cdot|$ continue car $1-$lipschitzienne par le corollaire de l'inégalité triangulaire. $\{|z|=1, z\in\mathbb{C}\}$ est une partie fermée bornée d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est donc une partie compacte de $\mathbb{C}$. P est continue sur cette partie donc M existe et il existe $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $|z_0|=1, M=|P(z_0)|$. Pour les Sup, $\{|P(z)|, |z|=1\}\subset\mathbb{R}$ et :

$$\forall |z|=1, |P(z)|\leq \sum_{k=1}^{d}|a_k|$$

donc $\{|P(z)|, |z|=1\}$ admet une borne supérieure en tant que partie de $\mathbb{R}$, bornée et non vide ! Le deuxième raisonnement, bien que plus simple, ne nous permet pas de dire si cette borne supérieure est atteinte ou non (*ie* $\exists |z_0|=1, M=|P(z_0)|$). ■

Utilisons les racines $d+1-$ième de l'unité pour démontrer le résultat. Notons $\omega=e^{\frac{2i\pi}{d+1}}$ et remarquons que pour $\ell\in[\![0,d]\!], P(\omega^\ell)=\sum_{k=0}^{d}a_k\left(\omega^\ell\right)^k=\sum_{k=0}^{d}a_k\left(\omega^k\right)^\ell$. Sommons les $P(\omega^\ell)$:

$$\sum_{\ell=0}^{d}P(\omega^\ell)=\sum_{k=0}^{d}a_k\sum_{\ell=0}^{d}\left(\omega^k\right)^\ell$$

Or :

$$\sum_{\ell=0}^{d}\left(\omega^k\right)^\ell=\begin{cases}\frac{1-\left(\omega^k\right)^{d+1}}{1-\omega^k}=0 \text{ pour } \omega^k\neq 1\iff k\in[\![1,d]\!]\\ d+1 \text{ pour } k=0\end{cases}$$

Il vient donc :

$$\sum_{\ell=0}^{d}P(\omega^\ell)=(d+1)a_0$$

Nous pouvons donc affirmer que :

$$(d+1)|a_0|=\left|\sum_{\ell=0}^{d}P(\omega^\ell)\right|\leq\sum_{\ell=0}^{d}\left|P(\omega^\ell)\right|\leq(d+1)M$$

Ce qui donne : $|a_0|\leq M$. Pour obtenir obtenir le coefficient a_p, faisons apparaître $\sum_{k=0}^{d}a_k\omega^{(k-p)\ell}$ et remarquons que :

$$\sum_{\ell=0}^{d}\omega^{-p\ell}P(\omega^\ell)=(d+1)a_p$$

ce qui nous permet de conclure que :

$$\forall p\in[\![0,d]\!], |a_p|\leq M$$

■ **Remarque** Nous avons montré qu'un contrôle sur le cercle unité de notre polynôme, nous fournissait un contrôle sur les coefficients de ce polynôme. Beau résultat qui va nous permettre de montrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}_d[X]$. ■

■