Sommation et partie entière des racines carrées

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

1. On trouve après calculs :
   - $S_1 = 0$
   - $S_2 = 3$
   - $S_3 = 13$

2. $\underline{S_{n+1} - S_n}$?

Brouillon 1.

$S_2 - S_1 = 3$

$S_3 - S_2 = 10$

$S_4 - S_3 = \sum_{k=0}^{15} \lfloor \sqrt{k} \rfloor - \sum_{k=0}^{8} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \sum_{k=9}^{15} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$

Or $\forall\ k \in [9, 15]$, $\sqrt{9} \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{15} \Rightarrow \lfloor \sqrt{k} \rfloor = 4$

$S_4 - S_3 = (15 - 9 + 1) * 4$

On remarque que le nombre entier à l'intérieur de la somme est constant.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient par **télescopage :**

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} [\sqrt{k}]$$

Or $(n+1)^2 - 1 < (n+1)^2$

donc $\forall\ k \in [n^2, (n+1)^2 - 1]$, $\quad n^2 \leq k < (n+1)^2$ et par stricte croissance de racine carrée sur R_+^* :

$$n \leq \sqrt{k} < n + 1$$

Ainsi

$$\forall k \in [n^2, (n+1)^2 - 1] \qquad \lfloor \sqrt{k} \rfloor = n$$

Il vient : $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} n = n[(n+1)^2 - 1 - n^2 + 1]$

i.e $\quad S_{n+1} - S_n = n[n^2 + 2n + 1 - 1 - n^2 + 1] = n[2n+1]$

Ainsi

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{n+1} - S_n = 2n^2 + n}$$

Astuce Soit $n \in \mathbb{N}^*$. on a :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad S_{k+1} - S_k = 2k^2 + k$
En sommant entre 1 et $n-1$, il vient :

$\sum_{k=1}^{n-1} S_{k+1} - S_k = \sum_{k=1}^{n-1} 2k^2 + k \quad$ et par télescopage

$S_n - \underbrace{S_1}_{=0} = 2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \;$ d'où :

$$\begin{aligned} S_n = 2\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} &= \frac{2n(n-1)(2n-1) + 3n(n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(4n-2+3)}{6} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \; S_n = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}}$$

■

■ **Vérification:**

$S_1 = 0 \rightarrow$ Ok; $\quad S_2 = \frac{2*1*9}{6} = 3 \rightarrow$ Ok

$S_3 = \frac{3*2*13}{6} = 13 \rightarrow$ Ok !

■