HEC 1991
- UNE SUITE IMPLICITE CLASSIQUE -

Préliminaire :

Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on considère la fonction polynomiale P_n définie par la relation :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - a$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad P_n'(x) > 0$$

D'où les variations :

x	0		x_n		$+\infty$
$P_n'(x)$		$+$		$+$	
P_n	$-a$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

P_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc P_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[-a, +\infty[$.

Or $0 \in]-a, +\infty[$, donc par le théorème de la bijection :

$$\boxed{\exists\,!\; x_n \in \mathbb{R}_+^*, \qquad P_n(x_n) = 0}$$

   - On a :

$$P_n(a) = \sum_{k=1}^{n} a^k - a = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a^k & \text{si } n \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Ainsi, comme $a > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(a) \geqslant 0 \qquad \text{i.e} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(a) \geqslant P_n(x_n)$$

Et par croissance de P_n sur $\mathbb{R}^+$, on conclut :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n \leqslant a}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x_n) &= \sum_{k=1}^{n+1} (x_n)^k - a \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_n)^k - a + (x_n)^{n+1} \\ &= \underbrace{P_n(x_n)}_{=0} + (x_n)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{n+1}(x_n) = (x_n)^{n+1}$$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} x_n \geqslant 0 \\ t \mapsto t^{n+1} \quad \text{croissante sur } \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (x_n)^{n+1} \geqslant 0$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1}(x_n) \geqslant 0} \qquad (*)$$

Point méthodologique 1.

Toujours la même astuce sur ce genre d'exercice. On se sert de $P_{n+1}(x_{n+1}) = P_n(x_n) = 0$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$

Donc, d'après (*),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1}(x_n) \geqslant P_{n+1}(x_{n+1})$$

Et par croissance de P_{n+1} :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \geqslant x_{n+1}}$$

Ainsi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

■ Remarque
Attention de ne pas écrire P_n est croissante, donc (x_n) est croissante $\longrightarrow$ c'est TRÈS FAUX.

3. • (x_n) est décroissante et minorée (par 0), donc par le théorème de la limite monotone, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel noté ℓ.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \geqslant 0$.
Donc, par prolongement des inégalités :

$$\boxed{\ell \geqslant 0}$$

• On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(1) = \sum_{k=1}^{n} 1^k - a = n - a$$

Or pour n grand, $n > a$, donc $(n-a) > 0$ et :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \qquad P_n(1) > 0$$

i.e

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \qquad P_n(1) > P_n(x_n)$$

Par croissance stricte de P_n sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad x_n < 1$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad x_n \leqslant x_{n_0} < 1$$

Et par prolongement des inégalités, on conclut :

$$\ell \leqslant x_{n_0} < 1$$

Finalement :

$$\boxed{0 \leqslant \ell < 1}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le cours :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - a = \begin{cases} n - a & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x} - a & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

<u>Premier cas</u> : Si $n = 1$
Alors

$$(x_n)^{n+1} - (a+1)x_n + a = 1 - (a+1) + a = 0$$

Donc, x_n est bien solution de $x^{n+1} - (a+1)x + a = 0$.

<u>Second cas</u> : Si $n \neq 1$
Alors

$$P_n(x_n) = \frac{x_n - x_n^{n+1} - a(1-x_n)}{1-x_n}$$

Et comme $P_n(x_n) = 0$, on a :

$$\frac{x_n - x_n^{n+1} - a + ax_n}{1-x_n} = 0$$

Rappel de cours 1.

$\dfrac{a}{b} = 0 \quad$ si et seulement si $\quad a = 0$

$$\Longrightarrow \qquad x_n - x_n^{n+1} - a + ax_n = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad x_n^{n+1} - (a+1)x_n + a = 0$$

x_n est encore une solution de $x^{n+1} - (a+1)x + a = 0$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \text{ est solution de } x^{n+1} - (a+1)x + a = 0}$$

• On a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n^{n+1} - (a+1)x_n + a = 0} \qquad \textbf{(A)}$$

Or d'après 3. :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant x_n \leqslant x_{n_0} < 1$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant x_n^{n+1} \leqslant (x_{n_0})^{n+1} < 1$$

Et comme $|x_{n_0}| < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} (x_{n_0})^{n+1} = 0$

Et par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} (x_n)^{n+1} = 0}$$

En passant à la limite dans **(A)**, on obtient :

$$-(a+1)\ell + a = 0$$

i.e finalement

$$\boxed{\ell = \frac{a}{a+1}} \qquad (a+1 \neq 0)$$