MATHS
SÉRIES NUMÉRIQUES
ECS

Un extrait de polycopié MyPrepa

Rappels de cours, méthodes, exercices et corrigés

Chapitre 11
Séries numériques

11.1. Convergence et divergence d'une série

Question 1 Comment montrer qu'une série converge ?

RAPPEL DE COURS

Soit (u_n) une suite réelle de premier terme u_{n_0}.

- On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge si et seulement si la suite $\left(\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right)_{N\geq n_0}$ converge.

On note alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n$

- u_n est le terme général de la série.
- $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série.
- $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ est une somme partielle de la série.
- Une série qui ne converge pas est dite divergente.
- La nature d'une série correspond à sa convergence ou sa divergence.
- Si la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, alors pour $p \geq n_0$, $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ est appelée reste d'ordre p de la série, et on a $\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = 0$.
- On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge absolument si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ converge.
- $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge absolument $\Rightarrow \sum_{n\geq n_0} u_n$ converge

Attention, la réciproque est fausse.

Méthode 1 En reconnaissant une série usuelle

RAPPEL DE COURS

1. Série exponentielle :

$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

2. Séries de Riemann :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

3. Séries géométriques et séries géométriques dérivées :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\sum_{n\geq 0} x^n$, $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$, $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ convergent $\iff |x| < 1$

Et dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \forall r \in \mathbb{N},\ \sum_{n=r}^{+\infty} q^n = q^r \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

- $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge $\Longleftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^*,\ \sum_{n \geq n_0} c u_n$ converge
- $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq n_0} u_n + v_n$ converge

Attention, la réciproque est fausse.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il s'agit simplement ici de faire apparaître à l'aide d'opérations calculatoires simples une série usuelle, permettant alors de conclure sur la convergence de la série en question.

Exercice

Montrer que $\sum_{n \geq 1} x^{\ln(n)}$ converge pour $x \left]0, \frac{1}{e}\right[$.

Corrigé

Soit $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, $x^{\ln(n)} = e^{\ln(x^{\ln(n)})} = e^{\ln(n)\ln(x)} = \left(e^{\ln(n)}\right)^{\ln(x)} = n^{\ln(x)} = \frac{1}{n^{-\ln(x)}}$

Or $0 < x < \frac{1}{e}$ donc $\ln(x) < \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln(e) = -1$

D'où $-\ln(x) > 1$ et on a une série de Riemann convergente.

Ainsi $\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[,\ \sum_{n \geq 1} x^{\ln(n)} \text{ converge}}$

Méthode 2 Par calcul direct de la somme de la série

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsque la question indique : « montrer la convergence de la série et en calculer sa somme », on montrera que la série converge en calculant directement sa somme.
Nous vous invitons donc à vous référer à *Question 3. Comment calculer la somme d'une série ?* pour cette méthode.

Méthode 3 Par utilisation du critère d'encadrement

RAPPEL DE COURS

$(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ sont deux suites de réels.

Si $\begin{cases} \bullet\ \exists\, p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq p,\ 0 \leq u_n \leq v_n \\ \bullet\ \sum_{n \geq n_0} v_n \text{ converge} \end{cases}$

Alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Comme rappelé ci-dessus, le critère de d'encadrement doit s'appliquer à deux suites positives à partir d'un certain rang. Si l'on veut montrer la convergence d'une série dont le terme général est une suite u, trois cas existent alors :
• Le cas où u est à valeurs positives ou nulles. On peut alors appliquer le théorème directement en trouvant un encadrement avec une suite v à valeurs positives ou nulles.
• Le cas où u est à valeurs négatives ou nulles. On applique alors le théorème à $-u$ pour montrer la convergence de la série de terme général $-u$, puis on conclut que celle de terme général u converge.
• Le cas où u n'est pas de signe constant. On applique alors le théorème à $|u|$, on montre ainsi la convergence absolue de la série et on conclut alors sur la convergence de la série.

Exercice

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge.

Corrigé

$\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin(t)| \leq 1$ donc $\forall n \geq 1,\ \left|\dfrac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{|n^2|}$

Ainsi, $\begin{cases} \bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \left|\dfrac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2} \\ \bullet \quad \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge (série de Riemann avec } 2 > 1) \end{cases}$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge absolument.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} \text{ converge}}$

Méthode 4 Par utilisation du critère d'équivalence

RAPPEL DE COURS

$(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont deux suites de réels.

$\begin{cases} \bullet\ \exists\, p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ u_n \geq 0 \text{ ou } \exists\, q \in \mathbb{N},\ \forall n \geq q,\ v_n \geq 0 \\ \bullet\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{cases}$

Alors $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de même nature.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Comme rappelé ci-dessus, le critère d'équivalence doit s'appliquer à deux suites dont l'une au moins est positive à partir d'un certain rang. Si l'on veut montrer la convergence d'une série dont le terme général est une suite u, trois cas existent alors :
• Le cas où u, ou sa suite équivalente, est à valeurs positives ou nulles. On peut alors appliquer directement le théorème.
• Le cas où u, ou sa suite équivalente, est à valeurs négatives ou nulles. On applique alors le théorème à $-u$ pour montrer la convergence de la série de terme général $-u$, puis on conclut que celle de terme général u converge.
• Le cas où u et sa suite équivalente ne sont pas de signe constant. On applique alors le théorème à $|u|$, on montre ainsi la convergence absolue de la série et on conclut alors sur la convergence de la série.

Exercice

Extrait d'ESSEC 2016

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{2x}{n^2 - x^2}$ converge.

Corrigé

x n'est pas un entier relatif donc x^2 non plus.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \neq x^2$ i.e. $n^2 - x^2 \neq 0$.

$$\frac{2x}{n^2 - x^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2x}{n^2}$$

Donc $\left|\frac{2x}{n^2 - x^2}\right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \left|\frac{2x}{n^2}\right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2|x|}{n^2}$

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \geq 0,\ \left|\frac{2x}{n^2 - x^2}\right| \geq 0 \\ \bullet\ \left|\frac{2x}{n^2 - x^2}\right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2|x|}{n^2} \\ \bullet\ \sum_{n \geq 1} \frac{2|x|}{n^2} \text{ converge (série de Riemann, } 2 > 1) \end{cases}$$

Donc $\sum_{n \geq 0} \frac{2x}{n^2 - x^2}$ converge absolument.

Ainsi, $\boxed{\sum_{n \geq 0} \frac{2x}{n^2 - x^2} \text{ converge}}$

Méthode 5

Par utilisation du critère de négligeabilité

RAPPEL DE COURS

$(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ sont deux suites de réels.

Si $\begin{cases} \bullet\ u_n \underset{n \to +\infty}{=} \circ(v_n) \\ \bullet\ \exists\ p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq p,\ v_n \geq 0 \\ \bullet\ \sum_{n \geq n_0} v_n \text{ converge} \end{cases}$

Alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer la convergence d'une série dont le terme général est une suite u, en utilisant la négligeabillité de u par rapport à une suite v, il est important de prendre une suite v qui respecte le critère de positivité.
Si v est à valeurs négatives, il faut alors travailler avec $-v$.
Si v change de signe, il faut alors travailler avec $|v|$.
La suite v est généralement le terme général d'une série de Riemann (on a souvent $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n^2}$)

Exercice

Montrer que $\sum_{n \geq 1} n^2 \ln(n) e^{-n}$ converge.

Corrigé

$\lim_{n \to +\infty} n^2 \times n^2 \ln(n) e^{-n} = 0$ par croissances comparées

Ainsi, $\begin{cases} \bullet\ \ n^2 \ln(n) e^{-n} \underset{n \to +\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \bullet\ \ \forall\ n \geq 1,\ \frac{1}{n^2} \geq 0 \\ \bullet\ \ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge (série de Riemann avec } 2 > 1) \end{cases}$

Ainsi $\boxed{\sum_{n\geq 2} n^2\ln(n)e^{-n} \text{ converge}}$

Méthode 6 Par utilisation du théorème sur les séries télescopiques

RAPPEL DE COURS

$$(u_n)_{n\geq n_0} \text{ converge} \iff \sum_{n\geq n_0}(u_{n+1}-u_n) \text{ converge}$$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Dès qu'on identifie une série téléscopique (série dont le terme général est de la forme $u_{n+1}-u_n$), il faut penser à utiliser le point de cours ci-dessus.
Ce critère est au programme, inutile de le redémontrer !

Exercice

Extrait d'EDHEC 2013

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Corrigé

On remarque que $\forall n\geq 1,\ \dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

Or $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge et tend vers 0.

Donc par le théorème des séries télescopiques, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ converge,

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)} \text{ converge}}$

Méthode 7 Par étude de la suite des sommes partielles de la série

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, on peut montrer que la suite des sommes partielles de la série converge. Pour cela, on pose $\forall N\geq n_0, S_N=\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ et on cherche à montrer que la suite $(S_N)_{N\geq n_0}$ converge.
Toutes les méthodes pour montrer la convergence d'une suite sont alors à notre disposition (théorème d'encadrement, théorème de la limite monotone, ...).

Exercice

Montrons que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n}$ converge.

On admettra que si les sous-suites extraites de rangs pairs et impairs d'une suite u convergent et ont même limite, alors u converge.

Corrigé

Notons $\forall N\in\mathbb{N}^*,\ S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n}$

- $\forall N\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{2N+2} - S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N+2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2N+2}+2N+2} - \frac{1}{\sqrt{2N+1}+2N+1} \leq 0 \quad \text{car} \\ \sqrt{2N+2}+2N+2 &\geq \sqrt{2N+1}+2N+1 \end{aligned}$$

Donc $(S_{2N})_{N\geq 1}$ est décroissante (1).

• $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{2N+3} - S_{2N+1} &= \sum_{n=1}^{2N+3} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n} - \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2N+3}+2N+3} + \frac{1}{\sqrt{2N+2}+2N+2} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $(S_{2N+1})_{N\geq 1}$ est croissante (2).

• $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{2N+1} - S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2N+1}+2N+1} \underset{N\to+\infty}{\to} 0 \quad (3). \end{aligned}$$

D'après (1), (2) et (3), $(S_{2N})_{N\geq 1}$ et $(S_{2N+1})_{N\geq 1}$ sont adjacentes donc convergent et ont même limite.

Les sous-suites extraites de rangs pairs et impairs convergent et ont même limite. Donc $(S_N)_{N\geq 1}$ converge.

Ainsi, $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n} \text{ converge}}$

Question 2 Comment montrer qu'une série diverge ?

Remarque

La divergence absolue n'entraîne pas la divergence. Ainsi montrer qu'une série diverge absolument ne permet pas de conclure que la série diverge.

C'est une erreur fréquente à ne surtout pas faire.

Méthode 1 En montrant que la limite du terme général est différente de 0

RAPPEL DE COURS

$$\sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Si la suite de terme général u_n ne converge pas vers 0 alors la série de terme général u_n diverge.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsque l'énoncé demande si une série converge ou non, il faut toujours avoir le réflexe de vérifier si la limite du terme général vaut 0. Si ce n'est pas le cas, on peut conclure directement en évitant une démonstration.

Attention, si la limite de la suite vaut 0 cela ne veut pas dire que la série converge. C'est une condition nécessaire de convergence mais non suffisante !

Exercice

Montrer que $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)$ diverge.

Corrigé

$$\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\times\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) = -1 \neq 0$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) \text{ diverge}}$

Remarque

Attention à ne pas faire l'erreur de dire $\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}=1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=1$
Cela est faux et mènerait à un mauvais résultat. En effet, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ n'implique pas $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^n=1$.

Méthode 2 En reconnaissant une série usuelle

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il s'agit simplement ici de faire apparaître à l'aide d'opérations calculatoires une série usuelle (géométrique ou de Riemann) afin de pouvoir conclure sur la divergence de la série.

Exercice

Déterminer l'ensemble des réels x strictement positifs tels que la série $\sum_{n\geq 0}\left(\ln(\sqrt{x})\right)^n$ diverge.

Corrigé

On reconnaît une série géométrique. Donc :
Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\sum_{n\geq 0}\left(\ln(\sqrt{x})\right)^n$ diverge $\iff |\ln(\sqrt{x})|\geq 1$
$\iff \ln(\sqrt{x})\leq -1$ ou $\ln(\sqrt{x})\geq 1 \iff \sqrt{x}\leq e^{-1}$ ou $\sqrt{x}\geq e^1 \iff x\leq e^{-2}$ ou $x\geq e^2$
Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\ln(\sqrt{x})\right)^n \text{ diverge} \iff x\leq e^{-2} \text{ ou } x\geq e^2}$

Méthode 3 Par utilisation du critère d'encadrement

RAPPEL DE COURS

$(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont deux suites de réels.

Si $\begin{cases} \bullet\ \exists\, p\in\mathbb{N} \text{ tel que } \forall n\geq p,\ 0\leq v_n\leq u_n \\ \bullet\ \displaystyle\sum_{n\geq n_0} v_n \text{ diverge} \end{cases}$

Alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Comme rappelé ci-dessus, le critère de d'encadrement doit s'appliquer à deux suites positives à partir d'un certain rang. Si l'on veut montrer la divergence d'une série dont le terme général est une suite u, trois cas existent alors :
• Le cas où u est à valeurs positives ou nulles. On peut alors appliquer le théorème directement en trouvant une inégalité avec une suite v à valeurs positives ou nulles.
• Le cas où u est à valeurs négatives ou nulles. On applique alors le théorème à $-u$ pour montrer la divergence de la série de terme général $-u$, puis on conclut que celle de terme général u divergence.
• Le cas où u n'est pas de signe constant. On ne peut alors pas utiliser cette méthode.

Exercice

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n-1+\cos(n)}$ diverge.

Corrigé

$\forall n \geq 3, \quad -1 \leq \cos(n) \leq 1$
Donc $\forall n \geq 3,\ 0 < n - 1 + \cos(n) \leq n$
Donc $\forall n \geq 3,\ \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n-1+\cos(n)}$

Ainsi, $\begin{cases} \bullet\ \forall n \geq 3,\ \dfrac{1}{n-1+\cos(n)} \geq \dfrac{1}{n} \geq 0 \\ \bullet\ \displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n} \text{ diverge (série de Riemann avec } \alpha = 1) \end{cases}$

Donc par critère d'encadrement $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n-1+\cos(n)} \text{ diverge}}$

Méthode 4 Par utilisation du critère d'équivalence

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Le critère d'équivalence doit s'appliquer à deux suites dont l'une au moins est positive à partir d'un certain rang. Si l'on veut montrer la divergence d'une série dont le terme général est une suite u, trois cas existent alors :
• Le cas où u, ou sa suite équivalente, est à valeurs positives ou nulles. On peut alors appliquer directement le théorème.
• Le cas où u, ou sa suite équivalente, est à valeurs négatives ou nulles. On applique alors le théorème à $-u$ pour montrer la divergence de la série de terme général $-u$, puis on conclut que celle de terme général u diverge.
• Le cas où u et sa suite équivalente ne sont pas de signe constant. On ne peut alors pas utiliser cette méthode.

Exercice

Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$?

Corrigé

$$\frac{1}{n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Ainsi, $\begin{cases} \bullet\ \dfrac{1}{n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \\ \bullet\ \forall n \geq 1,\ \dfrac{1}{n} \geq 0 \\ \bullet\ \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge} \end{cases}$

Par critère d'équivalence, $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} \text{ diverge}}$

Méthode 5 Par utilisation du critère de négligeabilité

RAPPEL DE COURS

$(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont deux suites de réels.

Si $\begin{cases} \bullet\ v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n) \\ \bullet\ \exists\ p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq p,\ u_n \geq 0 \\ \bullet\ \displaystyle\sum_{n\geq n_0} v_n \text{ diverge} \end{cases}$

Alors $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer la divergence d'une série dont le terme général est une suite u, en utilisant la négligeabillité d'une suite v par rapport à u, trois cas sont possibles :
• Si u est à valeurs positives ou nulles à partir d'un certain rang, on peut appliquer directement le théorème.
• Si u est à valeurs négatives ou nulles à partir d'un certain rang, on applique le théorème avec $-u$, on montre la divergence de la série de terme général $-u$ puis on conclut sur la divergence de la série de terme général u.
• Si u n'est pas de signe constant, on ne peut alors pas appliquer cette méthode.

Exercice

Montrer que $\sum\limits_{n\geq} \sqrt{\dfrac{1}{n\ln(n)}}$ diverge

Corrigé

$\forall n \geq 1, \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n\ln(n)}}} = \sqrt{\dfrac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Ainsi $\begin{cases} \bullet \quad \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \circ\left(\sqrt{\dfrac{1}{n\ln(n)}}\right) \\ \bullet \quad \forall n \geq 1, \sqrt{\frac{1}{n\ln(n)}} \geq 0 \\ \bullet \quad \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n} \text{ diverge (série de Riemann avec } \alpha = 1) \end{cases}$

Par critère de négligeabilité , $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} \sqrt{\dfrac{1}{n\ln(n)}} \text{ diverge}}$

Méthode 6 Par le théorème sur les séries télescopiques

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si on est en présence d'une série dont le terme général est de la forme $u_{n+1} - u_n$, il faut avoir le réflexe d'utiliser le cours sur les séries télescopiques pour montrer sa divergence.

Exercice

Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ diverge.

Corrigé

$\forall n \geq 1, \ \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$

Or $(\ln(n))_{n\geq 1}$ diverge donc par le théorème des séries télescopiques, $\sum\limits_{n\geq 1}(\ln(n+1)-\ln(n))$ diverge.

Donc $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \text{ diverge}}$

Méthode 7 En montrant que la suite des sommes partielles de la série ne converge pas vers une limite réelle

POINT MÉTHODOLOGIQUE

On peut montrer que la suite des sommes partielles diverge pour trouver la divergence d'une série.
En pratique, on essaye le plus souvent de montrer que la suite des sommes partielles de la série admet une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ en procédant au calcul de cette limite.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls tels que

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\ N_0 \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N_0} u_n > M.$$

Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Corrigé

Notons $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$

• $\forall N \in \mathbb{N}, S_{N+1} - S_N = \sum\limits_{n=0}^{N+1} u_n - \sum\limits_{n=0}^{N} u_n = u_{N+1} \geq 0$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls

Donc $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante.

• $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\ N_0 \in \mathbb{N},\ S_{N_0} > M$

Donc $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

$(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée.

D'où $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ diverge et tend vers $+\infty$.

Ainsi $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ diverge}}$

Question 3 Comment calculer la somme d'une série convergente ?

Méthode 1 A l'aide des séries usuelles

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Dans certains cas, on pourra calculer directement la somme de la série en utilisant les formules sur les séries usuelles (géométriques, géométriques dérivées et exponentielles) rappelées au début de ce chapitre. On travaille avec les sommes partielles (on fait les opérations avec $\sum\limits_{n=n_0}^{N} u_n$ et pas $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ car on n'a pas encore prouvé la convergence), on fait apparaître la somme partielle d'une série usuelle. On peut alors conclure sur la convergence de la série (ne pas oublier d'écrire que la série converge) et donner la valeur de sa somme.

Exercice

Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{4^n}{(n+1)!}$ et calculer sa somme.

Corrigé

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{4^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{4^{n-1}}{n!} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N+1} \frac{4^n}{n!} = \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{N+1} \frac{4^n}{n!} - \frac{4^0}{0!}\right]$$

On reconnait une série exponentielle.

Donc $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{4^n}{(n+1)!} \text{ converge}}$ et on a : $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{4}(e^4 - 1)}$

Méthode 2 ## Par télescopage

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsque l'on a affaire à une série télescopique $\sum_{n \geq n_0} (u_{n+1} - u_n)$, on pose $N \geq n_0 + 1$ puis on utilise la formule sur les sommes télescopiques pour justifier que $\sum_{n=n_0}^{N} (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_{n_0}$. On peut alors faire tendre N vers $+\infty$, on obtient une valeur finie qui justifie la convergence de la série, et la limite obtenue est égale à la somme de la série.

Exercice

Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{((n+1)^2)}{(n(n+2))}\right)$ et déterminer sa somme.

Corrigé

Soit $N \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) &= \sum_{n=1}^{N} 2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (\ln(n+1) - \ln(n)) + \sum_{n=1}^{N} (\ln(n+1) - \ln(n+2)) \\
&= (\ln(N+1) - \ln(1)) + (\ln(2) - \ln(N+2)) \text{ (car on a reconnu deux sommes télescopiques)} \\
&= \ln(2) + \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right)
\end{aligned}$$

Or $\frac{N+1}{N+2} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N}{N} \underset{N\to+\infty}{\sim} 1 \underset{N\to+\infty}{\to} 1$ et donc :

$\lim_{N\to+\infty} \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) = \ln(1) = 0$ car ln est continue en 1

Donc $\boxed{\text{la série converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \ln(2)}$

Méthode 3 ## A l'aide de résultats probabilistes

Remarque

Cette méthode nécessite la connaissance du cours sur les variables aléatoires discrètes infinies. Si vous ne l'avez pas encore abordé en cours, ne vous y attardez pas.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Dans certains cas, on peut reconnaître la formule d'une espérance ou variance d'une loi usuelle de variable aléatoire discrète, ce qui permet de justifier directement la convergence de la série et d'en connaître sa valeur.

Exercice

Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} (k-a)^2 a^k \frac{e^{-a}}{k!}$ pour a réel strictement positif et déterminer sa somme.

Corrigé

Soit $a > 0$. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$.
- $V(X)$ existe et $V(X) = a$.
- On a $V(X) = E((X - E(X))^2)$

Donc, d'après le théorème de transfert :

$$V(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - E(X))^2 P(X = k)$$

Et, comme $E(X) = a$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = a^k \dfrac{e^{-a}}{k!}$

$$V(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - a)^2\ a^k \frac{e^{-a}}{k!}$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{k\geq 0} (k-a)^2 a^k \dfrac{e^{-a}}{k!} \text{ converge et vaut } a}$

Méthode 4 **En faisant le lien entre les sommes partielles des termes de rangs pairs et de rangs impairs**

POINT MÉTHODOLOGIQUE

On peut décomposer une somme partielle comme somme des termes de rangs pairs et somme des termes de rangs impairs. Cette décomposition peut permettre de déterminer la somme d'une série dans le cas où l'on connaîtrait la valeur des sommes des deux autres séries.
Par exemple, si l'on cherche à déterminer la somme d'une série de termes de rangs impairs, on peut l'obtenir si l'on connaît la somme de la série de termes de rangs quelconques et la somme de la série de termes de rangs pairs.

Exercice

En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Corrigé

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a, en dissociant termes pairs et impairs :

$$\sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$

Les séries associées au membre de droite convergent donc $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}$

D'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

Méthode 5 **En donnant une forme intégrale au terme général**

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Dans certains cas, on peut remarquer que le terme général de la série est égal à une intégrale et ensuite utiliser la linéarité de l'intégrale. Il faut cependant bien penser à travailler avec les sommes partielles car on ne peut appliquer la linéarité de l'intégration à une somme infinie.

Exercice

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Montrer que $\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{a+kb}$ converge et prouver que $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{a+kb}=\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt.$

Corrigé

Soit $(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a+kb} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{a+kb-1}\,dt=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}t^{a-1}(-t^b)^k\,dt\\ &=\int_0^1 t^{a-1}\sum_{k=0}^{n}(-t^b)^k dt=\int_0^1 t^{a-1}\,\frac{1-(-t^b)^{n+1}}{1-(-t^b)}\,dt\end{aligned}$$

car on a une somme géométrique avec $\forall t\in[0,1],\ -t^b\neq 1$

Après simplification, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}-\underbrace{\int_0^1\frac{t^{a-1}(-t^b)^{n+1}}{1+t^b}}_{I_n}\ (*)$$

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ |I_n| &= \left|\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}t^{a-1+b(n+1)}}{1+t^b}\,dt\right|\\ &=\left|(-1)^{n+1}\right|\left|\int_0^1\frac{t^{a-1+b(n+1)}}{1+t^b}\,dt\right|\leq\int_0^1 t^{a-1+b(n+1)}\,dt\end{aligned}$$

car $\forall t\in[0,1],\ \frac{1}{1+t^b}\leq 1$ et $t^{a-1+b(n+1)}\geq 0$

Or $\int_0^1 t^{a-1+b(n+1)}\,dt=\frac{1}{a+b(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\to}0$

Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(*)$, on a :

$$\boxed{\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{a+kb}\text{ converge et }\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{a+kb}=\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt}$$

Méthode 6 En primitivant ou dérivant une égalité établie précédemment

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Dans certains cas, l'énoncé nous a invité à établir lors de questions précédentes une égalité impliquant une somme partielle dépendant d'un entier N et d'un réel x appartenant à un intervalle I. La question suivante demande alors de montrer une égalité sur la somme d'une série, et on reconnaît dans cette égalité une primitive ou une dérivée de l'égalité précédente. Il s'agit alors de partir de l'égalité précédente, de la primitiver ou de la dériver selon l'égalité à obtenir, puis de faire tendre N vers $+\infty$ afin d'obtenir l'égalité sur la somme de la série. Il est très important de ne pas passer à la limite avant, car on ne peut pas dériver ni primitiver une somme infinie.

Exercice

Extrait d'EM LYON 2007

1) Montrer que pour $N\in\mathbb{N}$ et pour $t\in[0,1]$ on a : $\frac{1}{1+t}=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k+\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}$

2) En déduire que, pour $x\in[0,1]$, la série $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ converge

et que $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$.

Corrigé

1) Soit $N\in\mathbb{N}$ et soit $t\in[0,1]$.

$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k=\sum_{k=0}^{N}(-t)^k=\frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)}=\frac{1-(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}$ (on a reconnu une série géométrique avec $-t \neq 1$)

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}$ et ainsi :

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}}$$

2) Soit $x \in [0,1]$ et $N \in \mathbb{N}$. En intégrant et en utilisant la linéarité de l'intégrale il vient :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\ dt = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \int_0^x t^k\ dt + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\ dt$$

Or $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\ dt = [\ln(|1+t|)]_0^x = \ln(1+x)$

Et $\forall k \in [\![0,N]\!]$, $\displaystyle\int_0^x t^k\ dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Ainsi $\displaystyle\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \underbrace{\int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\ dt}_{I_N(x)}$

Comme $0 \leq x$, on a par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|I_N(x)| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\ dt\right| &\leq \int_0^x \left|\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right|\ dt \\
&\leq \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}\ dt \\
&\leq \int_0^x t^{N+1}\ dt = \frac{x^{N+2}}{N+2} \quad \text{car } \forall t \in [0,x],\ \frac{t^{N+1}}{1+t} \leq t^{N+1}
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle 0 \leq |I_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2} \leq \frac{1}{N+2}$

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+2} = 0$

Par encadrement on a donc $(I_N(x))_{N\geq 0}$ converge et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} I_N(x) = 0$

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k\ x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) - I_N(x)$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in [0,1],\ \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k\ x^{k+1}}{k+1} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\ x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)}$$

Méthode 7

Par la formule de Taylor avec reste intégral

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Le plus souvent, lorsque cette méthode doit être appliquée, plusieurs sous-questions seront posées afin de faciliter le travail de l'étudiant.
Cette méthode consiste à appliquer la formule de Taylor avec reste intégral, en général à l'ordre N pour faire apparaître une somme partielle de la série étudiée.
On cherche ensuite à calculer la limite quand N tend vers $+\infty$ du reste intégral (celle-ci est souvent 0 et déterminée en utilisant l'inégalité triangulaire) : cela permet alors de justifier la convergence de la série (car la somme partielle admet une limite finie) et d'en calculer sa somme.

Exercice

Extrait d'ESCP 1997

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et soit g une fonction réelle indéfiniment dérivable sur $[-a,a]$ pour laquelle il existe un réel positif K tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\max_{t\in[-a,a]}\left|g^{(n)}(t)\right| \leq \frac{K^n\ n!}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor!}$

1) Montrer que pour tout $\lambda \in [-a,a]$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!}\ g^{(n+1)}(t)\ dt = 0$

(On admettra que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(K|\lambda|)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor !} = 0$)

2) En déduire que $\forall \lambda \in [-a,a],\ g(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\ \lambda^n$

Corrigé

1) Soit $\lambda \in [-a,a]$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

• **Cas 1 :** $\lambda \geq 0$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!}\ g^{(n+1)}(t)\ dt \right| &\leq \int_0^\lambda \frac{|\lambda-t|^n}{n!}\ \left|g^{(n+1)}(t)\right|\ dt \\
&\leq \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!}\ \frac{K^{n+1}(n+1)!}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor !}\ dt \\
&\leq \frac{K^{n+1}(n+1)!}{n!\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor !}\ \left[-\frac{(\lambda-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^\lambda \\
&\leq \frac{K^{n+1}(n+1)}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor !}\ \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} \\
&\leq \frac{K^{n+1}|\lambda|^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor !}
\end{aligned}$$

• **Cas 2 :** $\lambda < 0$.

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!}\ g^{(n+1)}(t)\ dt \right| &= \left| \int_\lambda^0 \frac{(\lambda-t)^n}{n!}\ g^{(n+1)}(t)\ dt \right| \\
&\leq \int_\lambda^0 \frac{|\lambda-t|^n}{n!}\ \left|g^{(n+1)}(t)\right|\ dt \\
&\leq \frac{K^{n+1}(n+1)!}{n!\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor !}\ \int_\lambda^0 (t-\lambda)^n dt \\
&\leq \frac{K^{n+1}(n+1)}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor !}\ \left[\frac{(t-\lambda)^{n+1}}{n+1} \right]_\lambda^0 \\
&\leq \frac{K^{n+1}(-\lambda)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor !} \\
&\leq \frac{K^{n+1}|\lambda|^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor !}
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall \lambda \in [-a,a]$, $\left| \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!}\ g^{(n+1)}(t)\ dt \right| \leq \frac{(K|\lambda|)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor !}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(K|\lambda|)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor !} = 0$, donc par encadrement :

$$\boxed{\forall \lambda \in [-a,a],\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!}\ g^{(n+1)}(t)\ dt = 0}$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, g est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-a,a]$ donc la formule de Taylor avec reste intégral donne : $\forall \lambda \in [-a,a]$,

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda-0)^k}{k!} g^{(k)}(0) + \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!}\ g^{(n+1)}(t)\ dt$$

D'après 1) en faisant tendre n vers $+\infty$, on a alors :

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\ \lambda^n = g(\lambda)}$$

Méthode 8 A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Le plus souvent, il sera indiqué par l'énoncé que cette méthode doit être appliquée. Cette méthode consiste à appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange afin d'obtenir une inégalité impliquant une somme partielle de la série étudiée. On montre alors que le membre de droite de l'inégalité tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Grâce au théorème d'encadrement on peut alors conclure sur la convergence de la série et sa valeur

Exercice

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à exp, montrer que $\forall x > 0$, $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Corrigé

Notons $f : x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = e^x$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x > 0$.
$\forall t \in [0, x], |f^{(n+1)}(t)| = e^t \leq e^x$
f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, x]$ donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n prise en 0 et x, on a :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-0)^k}{k!} f^{(k)}(0)\right| \leq e^x \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{i.e.} \quad \left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ par croissances comparées

Donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 0$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge et on a : $\boxed{\forall x > 0,\ e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}$

11.2. Encadrement de la somme d'une série

Question 1 Comment encadrer la somme d'une série ?

Méthode 1 Par encadrement du terme général

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode consiste tout d'abord à trouver une inégalité concernant le terme général u_n de la série. Ensuite, on somme l'inégalité pour n allant de n_0 (le rang du premier terme de la série) à un entier N. Puis on fait tendre N vers $+\infty$, en s'assurant de la convergence des séries en présence, qu'il est important de justifier.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)!\ u_n \leq 1$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq e-1$.

Corrigé

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)!\ u_n \leq 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$

Soit $N \geq 1$, on a par sommation pour n allant de 0 à N : $\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} \dfrac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N+1} \dfrac{1}{n!}$

D'où $\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N+1} \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{0!}$

Astuce

La série exponentielle part de $n=0$, et pas de $n=1$, on force donc la forme que l'on veut à apparaître en ajoutant le terme pour $n=0$ puis en le soustrayant.

$\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$ converge (série exponentielle) et $\sum_{n\geq 0} u_n$ aussi.

Donc on peut faire tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité et on obtient : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} - 1$

Ainsi $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq e-1}$

Méthode 2 A l'aide d'une comparaison série/intégrale

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode est déjà détaillée dans le *Chapitre 10 - Intégration sur un segment* mais nous la redétaillons ici :
On raisonne ici dans le cas d'une fonction f croissante (si f est décroissante la méthode est analogue) et continue sur un intervalle donnée.

• **Etape 1** : Poser un entier k.
On a alors $\forall t \in [k, k+1], k \leq t \leq k+1$.

• **Etape 2** : Appliquer f (croissante) à l'inégalité
Ainsi, $\forall t \in [k, k+1], \quad f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$.

• **Etape 3** : Utiliser la croissance de l'intégration. On a :

$$\int_k^{k+1} f(k)\ dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\ dt \leq \int_k^{k+1} f(k+1)\ dt$$

i.e. $(k+1-k)f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\ dt \leq (k+1-k)\ f(k+1)$

i.e. $f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\ dt \leq f(k+1)$

• **Etape 4** : Sommer l'inégalité précédente et utiliser la relation de Chasles. En sommant l'inégalité précédente, on a : $\sum f(k) \leq \sum \int_k^{k+1} f(t)\ dt \leq \sum f(k+1)$

Puis, d'après la relation de Chasles, $\sum f(k) \leq \int f(t)\ dt \leq \sum f(k+1)$

En raisonnant de diverses manières avec les inégalités de l'étape 3, on peut obtenir d'autres encadrements de la série.

Exercice

1) Montrer que $\forall n \geq 2,\ \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leq \ln(n)+1$.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

Remarque

La question 1) est un grand classique, dont les étapes seront parfois un peu plus détaillées par l'énoncé.
La question 2) ne correspond pas à l'obtention d'un encadrement, mais elle est un classique découlant de la question 1).

Corrigé

1) Soit $n \geq 2$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [k, k+1],\ k \leq t \leq k+1$

Donc $\forall t \in [k, k+1],\ \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$

Or, $\begin{cases} \bullet \text{ Les fonctions en présence sont continues} \\ \bullet\ k \leq k+1 \end{cases}$

Par croissance de l'intégration, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dt$

Et donc $\dfrac{1}{k+1} \leq [\ln(t)]_k^{k+1} \leq \dfrac{1}{k}$

D'où $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$ $(*)$

• En sommant la partie droite de l'inégalité $(*)$ entre 1 et n on a :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Et par télescopage : $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (1)

• En sommant la partie gauche de l'inégalité $(*)$ entre 1 et $n-1$, on a :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} [\ln(k+1) - \ln(k)]$

Et par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$ (2)

Ainsi, $\boxed{\forall n \geq 2,\ \ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1}$

2) On a donc $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \leq \dfrac{\ln(n)+1}{\ln(n)}$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)} = 1$

Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$

Rares sont ceux qui vont jusque là ...