Chapitre 9

Fonctions. Limites, continuité, dérivabilité

Dans les grandes lignes, ce chapitre n'est pas une nouveauté pour un élève de première année. Les notions de limite et de continuité d'une fonction ont déjà été travaillées au lycée donc le cours ne devrait pas être trop difficile à apprendre et à comprendre. Il est cependant important de prendre conscience de l'importance de bien connaître le cours pour être parfaitement rigoureux.

DANS CE CHAPITRE

15 questions classiques

28 méthodes

38 exercices

Sommaire

Chapitre 9. Fonctions. Limites, continuité, dérivabilité 401

9.1. Ensemble de définition 403

Question 1. Comment justifier qu'une fonction f est bien définie sur I ? 403
Question 2. Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f ? 404

9.2. Limite. 405

Question 3. Comment montrer qu'une fonction admet une limite en un point ? 405
Question 4. Comment calculer la limite d'une fonction en un point ? 406

9.3. ★ Négligeabilité, équivalence 412

Question 5. ★ Comment montrer qu'une fonction est négligeable devant une autre ? . 412
Question 6. ★ Comment déterminer un équivalent d'une fonction en un point ? 413
Question 7. ★ Comment utiliser un équivalent pour calculer une limite ? 418

9.4. Continuité 419

Question 8. Comment étudier la continuité d'une fonction f en un point x_0 ? 419
Question 9. Comment montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle I ? 421
Question 10. Comment montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point x_0 ? 423

9.5. Dérivation 424

Question 11. Comment étudier la dérivabilité d'une fonction en un point ? 424
Question 12. Comment montrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle et calculer sa dérivée ? 427
Question 13. Comment montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ? . . 431

9.6. Dérivées successives 435

Question 14. ★ Comment montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$? 435
Question 15. ★ Comment calculer la dérivée n^{eme} d'une fonction ? 438

9.7. Exercices corrigés 441

Exercice 32. Continuité de fonctions 441
Exercice 33. Continuité d'une fonction définie en fonction d'une autre 441
Exercice 34. ★ Calcul de limites à l'aide d'équivalents 441
Exercice 35. ★ Calcul de la limite d'une fonction paramétrée 441
Exercice 36. ★ Propriété des équivalents 441
Exercice 37. Une fonction dérivable est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? 442
Exercice 38. Dérivées successives d'une fonction 442

9.8. Corrigés des exercices. 443

Corrigé exercice 32. Continuité de fonctions 443
Corrigé exercice 33. Continuité d'une fonction définie en fonction d'une autre 444
Corrigé exercice 34. ★ Calcul de limites à l'aide d'équivalents 444
Corrigé exercice 35. ★ Calcul de la limite d'une fonction paramétrée 446
Corrigé exercice 36. ★ Propriétés des équivalents 446
Corrigé exercice 37. Une fonction dérivable est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? 449
Corrigé exercice 38. Dérivées successives d'une fonction 451

Remarque

Le programme officiel découpe ce chapitre en deux parties : des premières notions sont supposées être abordées au premier semestre (limite, continuité, dérivation, ...) et d'autres notions au second semestre (équivalents, dérivées successives, ...). Nous avons fait le choix de traiter toutes ces notions dans le même chapitre car en réalité, elles s'entrecroisent, et les étudier ensemble permet une maîtrise plus globale (par exemple, les équivalents peuvent servir à calculer des limites). Chaque question ou méthode considérée par le programme officiel comme « enseignement du second semestre » sera indiquée par le symbole ★. Si vous n'avez pas vu la ou les notions concernant ces questions ou méthodes, ne vous y attardez pas.

9.1. Ensemble de définition

Question 1 — Comment justifier qu'une fonction f est bien définie sur I ?

RAPPEL DE COURS

- L'ensemble de définition de ln est $\mathbb{R}_+^*$.
- L'ensemble de définition de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}^+$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble de définition de $x \mapsto x^\alpha$ est :
  - $\mathbb{R}$ si α est un entier naturel.
  - $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si α est un entier strictement négatif.
  - $\mathbb{R}^+$ si $\alpha = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
  - $\mathbb{R}_+^*$ si α est un réel irrationnel.

Méthode 1 — En vérifiant que $f(x)$ existe pour tout $x \in I$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Quand on cherche à justifier qu'une fonction f est bien définie sur un ensemble I connu, on fixe x dans I et on justifie que $f(x)$ est bien définie : s'il y a un quotient, il faut vérifier que le dénominateur ne s'annule pas ; s'il y a une racine, il faut vérifier que le terme à l'intérieur de la racine est positif ou nul, ...

Exercice 1

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$ est bien définie sur $]-1, +\infty[$.

Corrigé

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $x+1$ est strictement positif, donc $\dfrac{1}{x+1}$ est défini et positif, donc $f(x)$ existe.

Ainsi : $\boxed{f \text{ est bien définie sur }]-1,+\infty[}$

Question 2 Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f ?

Méthode 2 En déterminant l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Quand on cherche l'ensemble de définition de f, on fixe $x \in \mathbb{R}$ et, en raisonnant par équivalences successives, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ existe.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \ln(2x + \sqrt{4x^2+1})$$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ existe si et seulement si $\sqrt{4x^2+1}$ existe et $2x + \sqrt{4x^2+1}$ est strictement positif, donc si et seulement si :

$$\begin{cases} 4x^2+1 \geqslant 0 \\ 2x + \sqrt{4x^2+1} > 0 \end{cases}$$

Or la première ligne du système est toujours vraie et la deuxième est toujours vraie lorsque x est positif ou nul. Par ailleurs, si $x < 0$, on a :

$$2x + \sqrt{4x^2+1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} > -2x$$

et comme la fonction $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et $-2x \geqslant 0$ dans ce cas) :

$$\begin{aligned} 2x + \sqrt{4x^2+1} > 0 &\Leftrightarrow 4x^2+1 > (-2x)^2 \\ &\Leftrightarrow 1 > 0 \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai.

On en déduit : $\boxed{\text{L'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}}$